

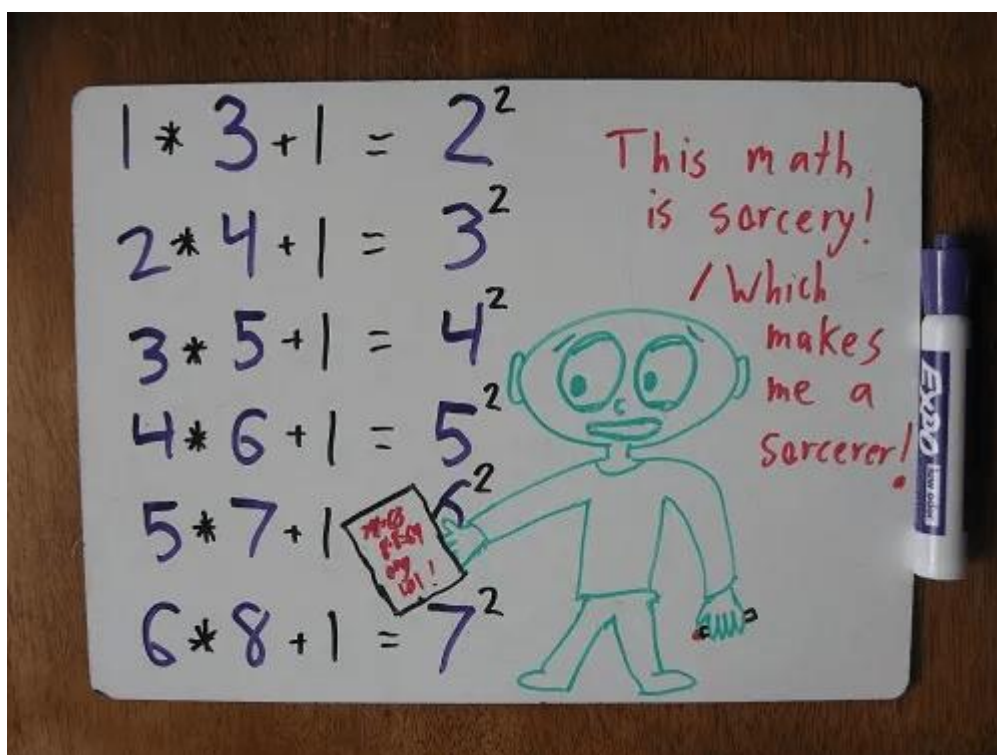


1# Dans la peau d'un-e mathématicien-ne

1.1 Indication didactique

Ann Kiefer

Pour être honnête, les mathématiciens ne font pas grand-chose. Ils boivent du café, froncent les sourcils devant les tableaux. Ils boivent du thé et froncent les sourcils devant les examens des étudiants. Ils boivent de la bière, froncent les sourcils devant les preuves qu'ils ont écrites l'année dernière et qu'ils n'arrivent plus à comprendre. C'est une vie où l'on boit, où l'on fronce les sourcils et, surtout, où l'on réfléchit. Vous voyez, il n'y a pas d'objets physiques en mathématiques : pas de produits chimiques à titrer, pas de particules à accélérer, pas de marchés financiers à détruire. Les verbes des mathématiciens se résument plutôt à des actions de pensée. [...] les mathématiques sont une action de l'esprit.¹ Ceci est la description des mathématiciens et/ou des mathématiques donnée par B. Orlin (2018) dans son livre *Math with Bad Drawings: Illuminating the Ideas That Shape Our Reality*.



Math with Bad Drawings: <https://mathwithbaddrawings.com/2014/01/13/undiscovered-math/>

Ce module donne la possibilité aux élèves de se plonger dans le rôle d'un mathématicien et d'explorer cet état d'esprit de penser mathématiquement. Mais c'est quoi exactement cette pensée mathématique ?

Les professeurs de musique incitent les élèves à écouter et à participer.

Les professeurs de langues et d'histoire invitent les élèves à voyager dans d'autres mondes.

Les professeurs d'art et d'art dramatique offrent aux élèves des possibilités d'exploration.

¹ To be honest, mathematicians don't do much. They drink coffee, frown at chalkboards. Drink tea, frown at students' exams. Drink beer, frown at proofs they wrote last year and can't for the life of them understand anymore. It's a life of drinking, frowning, and, most of all, thinking. You see, there are no physical objects in math: no chemicals to titrate, no particles to accelerate, no financial markets to destroy. Rather the verbs of the mathematicians all boil down to actions of thought. [...] mathematics is an action of the mind (B. Orlin, 2018).

Que devons-nous offrir en mathématiques aux élèves pour qu'ils puissent fonctionner en mathématiques ? (Gilderdale, 2011)

Malheureusement, beaucoup de gens ont une idée fausse des mathématiques, les réduisant à de simples calculs ou multiplications de nombres. En réalité, les mathématiques sont une discipline profondément créative qui repose davantage sur la réflexion et l'expression écrite que sur l'arithmétique complexe que le grand public leur associe généralement.

Une équipe de recherche internationale (Petozc et al. 2007) a voulu savoir ce que les étudiants de première année à l'université entendaient par le terme « mathématiques ». L'enquête a été menée en Australie, au Brunei, au Canada, en Irlande du Nord et en Afrique du Sud (des pays ayant des liens historiques avec l'Empire britannique, et des systèmes éducatifs dérivant du système britannique). Ont été interrogés des élèves issus de filières de mathématiques, d'ingénierie et d'informatique. Un premier résultat : plus de la moitié des étudiants ont défini les mathématiques avant tout comme un outil permettant de trouver des solutions à des problèmes. Les auteurs en concluent qu'il est urgent d'élargir le champ des mathématiques et de donner aux étudiants une image plus large des mathématiques. Les chercheurs proposent que les enseignants ne se concentrent pas uniquement sur les techniques dans les cours et les salles de classe, mais qu'ils montrent comment certaines professions utilisent et comprennent les mathématiques (professeurs de mathématiques, statisticiens, ingénieurs, programmeurs, etc.) Pour ces professions aussi, les chiffres et les boîtes à outils font partie intégrante des mathématiques. Mais ce n'est que le début pour eux.

Nous nous sommes donnés pour but de commencer cette ouverture d'esprit sur les mathématiques plus tôt qu'à l'université et l'un des objectifs de ce module est de montrer ce qu'est réellement la pensée mathématique, la résolution de problèmes et la rédaction de preuves, de montrer comment faire ces choses, et de montrer à quel point c'est amusant. Dans ce module nous donnons (essayons de donner) une réponse à cette question en brisant avec la structure classique d'un cours de mathématique, où l'enseignant explique la théorie, fait un exemple au tableau devant toute la classe et puis les élèves répètent le même exemple plusieurs fois en version « drill ». Ici les élèves reçoivent comme point de départ quelques exemples qui illustrent une curiosité mathématique. Puis c'est aux élèves de trouver plus d'exemples eux-même et de dégager un schéma récurrent derrière ces exemples pour ensuite formuler une conjecture. Une fois leur conjecture formulée, ils et elles doivent essayer de la prouver ou de trouver un contre-exemple. Tout ce travail est effectué en groupe, suivi par des mises en commun et des discussions en classe. Le leitmotiv serait ici *HOTS not MOTS*, où HOTS est l'abréviation de *High Order Thinking Skills* et MOTS est l'abréviation de *More Of The Same*. Cette activité permettra aux élèves de vivre l'expérience authentique d'un mathématicien professionnel. Contrairement aux exercices traditionnels, ils devront explorer, analyser et tenter de prouver ou réfuter un théorème en s'appuyant sur des observations intrigantes faites précédemment.

Le module « Dans la peau d'un•e mathématicien•ne » devrait être utilisé dans le chapitre *calcul littéral* du programme de 6e et vise la *modélisation d'une situation à l'aide d'une expression littérale*. Cette activité stimule la capacité des élèves à se poser les bonnes questions et à « penser mathématiquement ». Le concept de pensée mathématique n'est pas nouveau. Pólya était un des premiers mathématiciens à décrire comment résoudre des problèmes mathématiquement [Pólya, 1945]. Schoenfeld (1985, 1992) a étendu ensuite ces idées fondamentales en identifiant plusieurs composantes de la pensée mathématique : la base de connaissances, les stratégies de résolution de problèmes, la métacognition (contrôle et autorégulation) et les systèmes de croyance. Pour le dire dans les mots de Stein et Smith (1998) :

Les tâches qui demandent aux élèves d'exécuter une procédure mémorisée de manière routinière constituent un type d'opportunité pour la réflexion des élèves ; les tâches qui exigent des élèves une réflexion conceptuelle et qui les incitent à établir des liens constituent un ensemble différent d'opportunités pour la réflexion des élèves.

C'est aussi le constat de David Baker, professeur de sociologie et éducation à l'Université de Pennsylvania : *Dans l'ensemble, on observe une évolution vers des mathématiques cognitives plus complexes, une évolution qui invite l'élève à agir comme un mathématicien au lieu d'assimiler passivement les mathématiques et les sciences.*²

Ceci n'est bien-sûr pas un exercice facile, ni pour l'élève, ni pour l'enseignant. Les difficultés à comprendre, à faire des connexions et à expliquer, que les élèves rencontreront lors de cette activité, sont désignées par Schoenfeld (2023) par le terme de *lutte positive* (*positive struggle*). Il s'agit d'un mécanisme permettant de développer une compréhension profonde et significative du contenu mathématique.

Du point de vue des enseignants, ceux-ci doivent être curieux, intrigués et désireux d'en savoir plus, mais aussi accepter le travail désordonné, valoriser la prise de risque et les idées à moitié formées, donner du temps pour réfléchir et encourager la discussion. [Gilderdale, 2011]. Le plus important reste cependant que les enseignants choisissent bien les sujets et les groupes d'élèves afin que tout le monde puisse profiter de l'activité et développer ses capacités de pensée mathématique.

Le module « Dans la peau d'un•e mathématicien•ne » est un bon exemple aussi d'une activité TRU. L'acronyme TRU signifie Teaching for Robust Understanding et est un cadre fondé par Alan H. Schoenfeld, professeur à l'Université de Californie. Il décrit les propriétés des salles de classe dans lesquelles les élèves deviennent des penseurs puissants et autonomes en mathématiques [Schoenfeld, 2023]. Les cinq dimensions de l'activité en classe sont au cœur du TRU. Les salles de classe qui réussissent bien dans ces 5 dimensions produisent des élèves qui sont des penseurs puissants :

The Five Dimensions of Powerful Classrooms				
The Content	Cognitive Demand	Equitable Access to Content	Agency, Ownership, and Identity	Formative Assessment
The extent to which classroom activity structures provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful disciplinary thinkers. Discussions are focused and coherent, providing opportunities to learn disciplinary ideas, techniques, and perspectives, and develop productive disciplinary habits of mind.	The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important disciplinary ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."	The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core disciplinary content being addressed by the class. Classrooms in which a small number of students get most of the "air time" are not equitable, no matter how rich the content: all students need to be involved in meaningful ways.	The extent to which students are provided opportunities to "walk the walk and talk the talk" – to contribute to conversations about disciplinary ideas, to build on others' ideas and have others build on theirs – in ways that contribute to their development of agency (the willingness to engage), their ownership over the content, and the development of positive identities as thinkers and learners.	The extent to which classroom activities elicit student thinking and subsequent interactions respond to those ideas, building on productive beginnings and addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to deepen their understandings.

Le cadre de l'TRU en bref, <https://truframework.org/>

² Overall, there's a movement towards more complex cognitive mathematics, there's a movement towards the student being invited to act like a mathematician instead of passively taking in math and science (Hartnett, 2016).

En résumé ce module a pour but de montrer aux élèves le côté abstrait, mais aussi créatif et curieux des mathématiques. Nous espérons de changer l'image des mathématiques ennuyeuses, ne servant à rien et loin de la réalité, contre une image plus positive et passionnante.

*Je ne m'attends pas, et je ne veux pas, que tous les enfants trouvent que les mathématiques sont une étude passionnante, ou une étude à laquelle ils veulent se consacrer, que ce soit à l'école ou dans leur vie. Seuls quelques-uns d'entre eux trouveront les mathématiques suffisamment séduisantes pour s'y engager à long terme. Mais j'espère que tous les enfants pourront faire l'expérience, à quelques moments de leur carrière, de la puissance et de l'enthousiasme des mathématiques, de sorte qu'à la fin de leur éducation formelle, ils sauront au moins à quoi elles ressemblent et si c'est une activité qui a sa place dans leur avenir.*³

Quelques-uns feront le reproche à ce module qu'il est trop abstrait et ne montre pas le côté appliqué des mathématiques. À ceux-là nous répondons que d'autres modules de ce PITT font déjà ce travail et, plus important, nous insistons sur le fait que *les mathématiques ne sont pas seulement enseignées parce qu'elles sont utiles. Elles devraient être une source de plaisir et d'émerveillement, offrant aux élèves une excitation intellectuelle et une appréciation de leur créativité essentielle.*⁴

Références

1. Cross, K. (2004). Engagement and excitement in mathematics. *Mathematics Teaching*. Vol. 189, pp. 4-7
2. Gilderdale, C. (2011). Generating Curiosity in Mathematics Learning. Nrich. <https://nrich.maths.org/5795>
3. Hartnett, K. (2016). Meet the New Math, Unlike the Old Math. *Quantamagazine*. <https://www.quantamagazine.org/math-and-science-education-pencils-down-20161005/>
4. Orlin, B. (2018). *Math with Bad Drawings: Illuminating the Ideas That Shape Our Reality*. Black Dog & Leventhal; Illustrated edition.
5. Petocz, P., Reid, A., Wood, L.N., Smith, G.H., Mather, G., Harding, A., Engelbrecht, J., Houston, K., Hillel, J., and Perrett, G. (2007) Undergraduate students' conceptions of mathematics: an international study. *International Journal of Science and Mathematics Education*: 5: 439-459
6. Pólya, G. (1945). *How to Solve It* (2nd edition). Princeton: Princeton University Press.
7. Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

³ I don't expect, and I don't want, all children to find mathematics an engrossing study, or one that they want to devote themselves to either in school or in their lives. Only a few will find mathematics seductive enough to sustain a long term engagement. But I would hope that all children could experience at a few moments in their careers...the power and excitement of mathematics...so that at the end of their formal education they at least know what it is like and whether it is an activity that has a place in their future. (Wheeler, D. (1975), cité dans Cross, K. (2004))

⁴ Mathematics is not only taught because it is useful. It should be a source of delight and wonder, offering pupils intellectual excitement and an appreciation of its essential creativity. (Cross, 2004)

8. Schoenfeld, A.H. (1985). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics, teaching and learning*, pp. 334-370. New York: MacMillan.
9. Schoenfeld, A.H. (2023). *Helping Students Become Powerful Mathematics Thinkers : Case Studies of Teaching for Robust Understanding*. New York: Routledge.
10. Stein, M.K. & Smith, M.S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.

1.2 Planification de l'unité

01 Modalités de l'unité

Public visé :	6e
Local :	Une salle de classe usuelle
Matériel nécessaire :	Au moins un ordinateur ou tablette avec accès à Internet par groupe de 2 élèves.
Durée :	2 ou 3 fois 90 minutes

02 Compétences visées

COMPETENCES VISEES PAR LE COURS DE MATHÉMATIQUES

- Utiliser une expression littérale pour modéliser des situations et pour décrire des dépendances.
- Décrire une série de figures ou une série de nombres à l'aide d'une expression littérale.
- Utiliser astucieusement une calculatrice ou un logiciel pour calculer une valeur numérique.
- Décoder une expression littérale en une série ordonnée d'instructions de calcul et savoir formaliser cet algorithme.

COMPETENCES VISEES PAR LE COURS DE SCIENCES NATURELLES (NATURWISSENSCHAFTEN)

- Formuler des hypothèses fondées en fonction du contexte, à l'aide d'exemples.
- Faire des observations ciblées, présenter et évaluer les résultats, et tirer des conclusions.
- Reconnaître des relations simples de cause à effet et en tirer des conclusions logiques.
- Représenter schématiquement et interpréter des modèles présentés.

COMPETENCES VISEES PAR LE GUIDE DE REFERENCE POUR L'ÉDUCATION AUX ET PAR LES MEDIAS⁵

- Compétences 1 : Analyser et évaluer des données, des informations et des contenus numériques.
- Compétences 2 : 2.1 Interagir avec autrui 2.3 Employer des formes d'expression appropriées (netiquette).
- Compétences 3 : 3.3 Modéliser, structurer et coder.

⁵ https://edumedia.lu/wp-content/uploads/2024/12/Medienkompass_FR_web.pdf

03 Déroulement de l'unité

Dans ce module, les élèves doivent se plonger dans des conjectures mathématiques. Ils doivent d'abord explorer des exemples, puis établir une conjecture, essayer de la démontrer pour à la fin formuler un théorème. Les différentes conjectures existent en version libre (M1) (sans aide, ni indices) et en version guidée (M2) (avec aides, indices et textes à trous).

Avant la leçon : l'enseignant divise les élèves en groupes de 4. Comme les problèmes ont des niveaux de difficulté différents, il est préférable de faire des groupes par niveau. Puis l'enseignant décidera à l'avance quel groupe travaillera sur quelles conjectures.

Notons que les conjectures 7 et 8 sont très difficiles. Elles sont censées être distribuées à des groupes d'élèves très forts en mathématiques. L'enseignant gardera aussi en tête qu'il n'est pas du tout nécessaire de traiter chaque conjecture de ce module. Le cas échéant, plusieurs groupes peuvent aussi travailler sur la même conjecture.

Il y a en tout 15 conjectures. Les conjectures sont de différents types :

- Conjectures 1 à 8 : ce sont des théorèmes vrais, facilement démontrables et ayant de courtes preuves. Ils ont cependant des niveaux de difficulté différents (voir tableau ci-dessus).
- Conjectures 9 à 12 : ce sont des conjectures réfutées, c'est-à-dire elles peuvent être prouvées fausses, respectivement un contre-exemple peut être trouvé. Ces énoncés sont faits d'une telle manière que si on se restreint à tester les 5 premiers cas, ces énoncés paraissent vrais. Or en testant un plus grand nombre de cas ($n=40$ pour 9, le 8^e exemple pour 10, $n=5$ pour 11 et $n=15$ pour 12), on tombe rapidement sur un contre-exemple, qui réfute la conjecture.
- Conjectures 13 à 15 : ce sont des conjectures ouvertes, dont les mathématiciens sont convaincus qu'elles sont vraies mais personne n'a été capable de les prouver à ce jour. On n'attend bien sûr pas des élèves qu'ils prouvent ces conjectures ouvertes. L'idée est de les familiariser une première fois avec le concept de conjecture mathématique ouverte. Les conjectures choisies sont toutes facilement compréhensibles et des exemples qui illustrent ces conjectures sont faisables pour des élèves de 6^e secondaire.

Le tableau suivant résume la nature et le niveau de difficulté des différentes conjectures.

Nature de la conjecture	Niveau de difficulté	Facile	Moyen	Difficile	Très difficile
Théorème vrai		01, 02	03, 04, 06	05	07, 08
Conjecture réfutée		09, 12	10	11	/
Conjecture ouverte		/	14	13, 15	

L'unité peut se faire en 2 ou en 3 étapes. Dans le premier cas, les énoncés vrais et prouvables (conjectures 1 à 8) sont traités pendant l'étape 1. Pendant l'étape suivante, les énoncés ouverts et réfutés (conjectures 9 à 15) sont abordés. Dans le deuxième cas, l'étape 1 traite les énoncés vrais et prouvables (conjectures 1 à 8), l'étape 2 des énoncés réfutés (conjectures 9 à 12) et la dernière étape des énoncés ouverts (13 à 15).

Première heure d'enseignement

Entrée en matière (15 min) : L'enseignant fait une courte introduction sur le concept de conjectures. Les définitions suivantes peuvent être données (ou n'importe quelle autre définition de conjecture).

Définition 1. Une **conjecture** est une assertion pour laquelle on ne connaît pas encore de démonstration, mais que l'on croit fortement être vraie.

Définition 2. Une **conjecture** est une hypothèse qui n'a encore reçu aucune confirmation.

Définition 3. Une **conjecture** est une proposition qui est émise sur la base d'observations, de motifs apparents, ou de résultats numériques, mais qui n'a pas encore été prouvée de manière formelle. Les mathématiciens formulent des conjectures lorsqu'ils remarquent des régularités dans les données ou des schémas dans leurs recherches.⁶

Les conjectures sont distribuées en version libre aux élèves, qui travaillent individuellement pour le moment. L'enseignant dit à chaque élève sur quelle conjecture (parmi les conjectures 1 à 8) il doit travailler (selon la distribution établie auparavant) et les laissent travailler individuellement.

Exemples et conjectures (30 min) : Les élèves se mettent en groupe, les groupes étant désignés par l'enseignant. Ils réfléchissent aux exemples, à la conjecture et à une idée de preuve. L'enseignant passe à travers les bancs pour aider et répondre aux questions, si besoin.

Deuxième heure d'enseignement

Formulation d'une preuve (35 min) : Les élèves essaient de formuler une preuve, ou une explication pour le phénomène observé. Ils réfléchissent à la formulation de leur conclusion.

Remarques importantes :

- Les élèves peuvent utiliser n'importe quelle langue pour discuter au sein de leur groupe. Cependant le matériel écrit doit être produit en français. Ceci est important pour que les élèves s'entraînent d'un côté à la rédaction mathématique en français et d'un autre côté, en rédigeant en français, les élèves restent consistants avec la langue véhiculaire du cours et le vocabulaire appris en cours.
- Il est important, dans ce module, que les élèves osent réfléchir à des problèmes de mathématiques. Leur rédaction, formulation ne doit pas être parfaite. L'enseignant doit les encourager à essayer de décrire leurs idées, même si leur rédaction n'est pas mathématiquement soignée et rigoureuse. Le slogan *Prôner l'imperfection pour exiger in fine la perfection* s'applique.
- Cette première partie peut se faire sans utilisation de TIC (Technologies de l'Information et de la Communication). Néanmoins nous recommandons aux enseignants d'autoriser les élèves à au moins utiliser des calculatrices ou des tableurs. Pour les enseignants qui veulent intégrer plus de technologies, d'autres outils peuvent s'avérer utiles.

Conclusion (10min) : Chaque groupe présentera brièvement sa conjecture. Une discussion collective suivra sur la complexité du problème et des étapes clés (trouver des exemples, formuler une conjecture, trouver une preuve, formuler un théorème).

⁶ Définition tirée de l'article suivant <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/mathematiques-conjecture-373/>

Fin de la leçon : L'enseignant ramassera toutes les copies et les corrigera pour la prochaine fois.

Différenciation : Les différentes conjectures existent en version libre (M1)(sans aide, ni indices) et en version guidée (M2)(avec aides, indices et textes à trous). Quand un groupe d'élèves semble être en difficulté, l'enseignant peut leur donner la version guidée du problème. La distribution de la version guidée sera adaptée aux besoins spécifiques de chaque groupe, en fonction de leur progression et de leurs difficultés particulières.

Notons que le plan de la leçon est établi sur la base du temps nécessaire quand les élèves travaillent sur la version libre des conjectures. Si toute la classe travaille dès le début sur la version guidée, le temps nécessaire peut être divisé par deux.

Troisième heure d'enseignement

Distribution des copies corrigées (10 min) : Les copies de la leçon précédentes sont distribuées aux élèves. Les élèves les parcourent et peuvent poser des questions.

Entrée en matière (10 min) : L'enseignant dit à chaque élève sur quelle conjecture il doit travailler (parmi les conjectures 9 à 15 si le module se fait en deux étapes uniquement, sinon parmi les conjectures 9 à 12 et selon la distribution établie auparavant) et les laissent travailler individuellement. Si le module se fait en deux étapes uniquement, l'enseignant veille à ce qu'au moins une conjecture de chaque catégorie (énoncés ouverts et énoncés réfutés) soit traitée.

Exemples et conjectures (25 min) : Les élèves se mettent en groupe, les groupes étant désignés par l'enseignant. Ils réfléchissent aux exemples, à la conjecture et à une idée de preuve. L'enseignant circule dans la classe pour aider et répondre aux questions, si besoin.

Quatrième heure d'enseignement

Formulation d'une preuve (35 min) : Les élèves essaient de formuler une preuve, ou une explication pour le phénomène observé. Ils réfléchissent à la formulation de leur conclusion.

Important :

- Les élèves peuvent utiliser n'importe quelle langue pour discuter au sein de leur groupe. Cependant le matériel écrit doit être produit en français. Ceci est important pour que les élèves s'entraînent d'un côté à la rédaction mathématique en français et d'un autre côté, en rédigeant en français, les élèves restent consistants avec la langue véhiculaire du cours et le vocabulaire appris en cours.
- Il est important, dans ce module, que les élèves osent réfléchir à des problèmes de mathématiques. Leur rédaction, formulation ne doit pas être parfaite. L'enseignant doit les encourager à essayer de décrire leurs idées, même si leur rédaction n'est pas mathématiquement soignée et rigoureuse.
- Pour cette deuxième partie nous recommandons l'utilisation des TICs (Technologies de l'Information et de la Communication). Les tableurs (par exemple Excel) ou programmes informatiques (p.ex. WolframAlpha, Scratch etc.) s'avèrent très utiles. Sans eux, les contre-exemples aux énoncés 9 à 12 sont difficiles à trouver. Pour les conjectures ouvertes, il est nécessaire de laisser les élèves effectuer une recherche sur Internet ou demander de l'aide à une intelligence artificielle (p.ex. ChatGPT, ShulKI etc.). Il est envisageable de les laisser se débrouiller sans outils de recherche au début et d'utiliser Internet que dans un deuxième temps. Le fait de réfléchir d'abord au problème et de

seulement trouver plus tard via un outil de recherche, que l'énoncé est en fait une conjecture ouverte, augmentera l'effet d'étonnement chez les élèves.

Conclusion (10 min) : Chaque groupe présentera brièvement sa conjecture. Une discussion collective suivra sur la complexité du problème et des étapes clés (trouver des exemples, formuler une conjecture, trouver un contre-exemple ou découvrir qu'il s'agit d'un problème ouvert, formuler une conclusion). Les concepts de contre-exemple et problème ouvert sont discutés.

Fin de la leçon : L'enseignant ramassera toutes les copies et les corrigera pour la prochaine fois.

Différenciation : Les différentes conjectures existent en version libre (sans aide, ni indices) et en version guidée (avec aides, indices et textes à trous). Quand un groupe d'élèves semble être en difficulté, l'enseignant peut leur donner la version guidée du problème. La distribution de la version guidée sera adaptée aux besoins spécifiques de chaque groupe, en fonction de leur progression et de leurs difficultés particulières.

Notons que le plan de la leçon est établi sur la base du temps nécessaire quand les élèves travaillent sur la version libre des conjectures. Si toute la classe travaille dès le début sur la version guidée, le temps nécessaire peut être divisé par deux.

Cinquième et sixième heure d'enseignement (facultatives)

Ces deux heures d'enseignement sont facultatives. Si ces leçons sont abordées, les énoncés 9 à 12 sont traités dans la troisième et quatrième leçon et les énoncés 13 à 15 dans les deux leçons suivantes. Le même plan de leçon qu'auparavant s'applique.

Septième (resp. Cinquième) leçon : Clôture

Distribution des copies corrigées (10 min) : Les copies de la leçon précédentes sont distribuées aux élèves. Les élèves les parcourent et peuvent poser des questions.

Comme décrit dans le paragraphe précédent, la clôture peut être faite après la deuxième ou la troisième leçon. Cette leçon se déroule selon le concept de *murs pédagogiques* (Agostino & de Versailles, 2024). Depuis sa mise en place à la rentrée 2017 au Lycée de la Plaine de Neauphle à Trappes dans les Yvelines, le dispositif pédagogique décrit dans ce chapitre, que l'on appelle « Murs pédagogiques », se retrouve aujourd'hui dans les pratiques de classes de plusieurs enseignants. Son appellation vient de l'équipement de certaines salles de cours avec des tableaux blancs installés aux murs. Les tableaux sont positionnés tout au long des murs libres et permettent de constituer des mini-classes en organisant les tables des élèves en fer à cheval autour de chaque tableau.

Mise en place (5 min) : En début de séance, les élèves sont répartis en groupes de quatre jusqu'à six. Chaque groupe s'installe face à l'un des tableaux ou simplement autour d'une table, les tableaux n'étant pas indispensables. Il est important de mixer les groupes et de ne pas garder les mêmes groupes que dans les phases précédentes.

Remarque importante : Si la deuxième et la troisième leçon ont été faites en une leçon, l'enseignant doit veiller à mettre dans chaque groupe au moins un élève qui a traité une conjecture fausse auparavant et un élève qui a traité une conjecture ouverte.

Première Phase (18 min). Les fausses publications Instagram (M3) sont distribuées parmi les différents groupes. Il faut prévoir au moins deux publications différentes pour que la deuxième

phase du scénario soit possible. Chaque groupe a la possibilité d'utiliser le tableau pour partager des tentatives et faire des essais. S'il n'y a pas des tableaux à disposition, les élèves peuvent simplement écrire sur des feuilles ou des tablettes. Aucune rédaction n'est attendue. En effet, on pourrait avoir la tentation de demander aux élèves de noter une résolution sur leur propre cahier dans une démarche de maximisation du travail de chacun, mais cette demande ne s'inscrit pas dans l'objectif principal de l'activité qui est d'aboutir à une résolution par le partage oral des idées avec un appui écrit au tableau. Dans cette activité, l'objectif du travail écrit est de permettre aux élèves de retenir les idées ou d'effectuer des calculs. (Agostino & de Versailles, 2024). Le but est que les élèves lisent les publications Instagram ainsi que les commentaires et en discutent :

- Qui a raison ?
- Qui se trompe ?
- Pourquoi ?

Pour défendre leurs idées ils doivent utiliser les conjectures qu'ils ont vues dans les leçons précédentes (exemple : « l'affirmation est fausse car nous avons aussi vu une conjecture qui semblait fonctionner mais ne fonctionnait plus à partir de $n=40$ »).

Remarque : Les différentes publications Instagram n'ont pas toutes le même niveau de difficulté. Voici un tableau récapitulatif des publications et de leurs difficultés.

Publication	Caractéristiques	Niveau de difficulté
1	• Abstrait, sans théorème spécifique • Positions clairement définies. Choix du vainqueur reste à faire.	Facile
2	• Conjecture spécifique à comprendre • Un commentaire signale un raisonnement erroné	Moyen
3	• Affirmation abstraite • Commentaire identifie l'erreur et sa source	Facile
4	• Texte volumineux • Mentionne l'hypothèse de Riemann sans explication (complexifie la tâche) • Ambiguïté sur qui a raison	Moyen
5	• Explique les nombres premiers jumeaux (prérequis à la discussion) • Texte abondant • Très abstrait • Raisonnement complexe sur l'infinité	Difficile
6	• Abstrait • Raisonnement complexe sur l'infinité	Difficile

Deuxième phase (7 min) : À la fin de la première phase, les groupes changent de mini-classe. Un élève par groupe reste à sa place (choisi par consensus ou par l'enseignant) pour présenter au nouveau groupe la publication Instagram étudiée précédemment, en s'appuyant sur la publication et les notes au tableau. Les arrivants prennent des notes, questionnent ou corrigent

si nécessaire. Ce moment permet aussi de terminer un travail inachevé. La prise de notes est autorisée car elle favorise la concentration et reproduit la posture habituelle en cours. Cette phase permet de réinvestir rapidement les apprentissages de la première étape.

En raison du changement de groupe, il est essentiel de distribuer au moins 2 publications Instagram différentes aux groupes. Il faut éviter qu'un élève qui se déplace retrouve la même publication Instagram que celle déjà étudiée.

La phase 2 requiert moins de temps. L'explication par l'élève restant est généralement correcte (fruit de la réflexion collective précédente), et l'essentiel consiste en la compréhension et les réponses aux questions du groupe. Ce processus est naturellement plus rapide que l'élaboration initiale de la solution.

Clôture (5 min) : La séance peut se terminer par un moment collectif où chaque groupe répond brièvement à une question comme « Qu'avez-vous appris aujourd'hui ? » ou « Qu'est-ce que cette séance vous a apporté ? ». Ce temps marque clairement un retour au collectif, les élèves s'exprimant pour la première fois devant toute la classe et l'enseignant. Ce bilan permet de vérifier l'acquisition du vocabulaire et d'évaluer la capacité des élèves à articuler un raisonnement logique. Cette prise de parole concise sur un sujet maintenant maîtrisé place l'élève dans un contexte plus exigeant que celui du petit groupe de travail.

04 Possibilités de différenciation

Comme indiqué dans la section précédente, il y a deux versions pour toutes les conjectures : la version libre (M1) et la version guidée (M2). Dans la version libre, les élèves doivent naviguer sans beaucoup d'aide à travers les conjectures. Chaque problème est posé de la même manière sous forme d'exemples – conjecture – preuve – théorème, et donc les élèves reçoivent un minimum de guidage, mais restent quand même sans aide face aux différentes sous-parties. Dans la version guidée, il y a des aides et des textes à trous pour guider les élèves.

L'enseignant est libre de combiner les deux versions comme il le souhaite :

- version libre pour certains élèves et version guidée pour d'autres,
- version libre pour le début et version guidée pour la suite,
- version libre pour les premières conjectures et version guidées pour les dernières conjectures,
- ...

05 Autres critères à remplir dans le cadre de la série des unités

- a. **Contexte luxembourgeois** : L'Université du Luxembourg a un département de mathématiques très actif et bien représenté sur la scène internationale. Deux des chercheurs de ce département sont visibles dans l'interview dans 1.6 *La parole aux scientifiques*.
- b. **Différenciation** : Comme décrit dans le paragraphe précédent, le module contient plusieurs niveaux de différenciation dans le choix même de la version de l'histoire mais aussi dans les exercices proposés.
- c. **Guide de référence pour l'éducation aux et par les médias⁷** :
 - Compétences 2 : 2.1 Interagir avec autrui. 2.3 Employer des formes d'expression appropriées (nétiquette).
 - Compétences 3 : 3.3 Modéliser, structurer et coder.
- d. **Modèle des 4C** : communication, collaboration, créativité, pensée critique : Les 4C interviennent dans ce module. Les différentes questions se résolvent en travail de groupe, ce qui demande de la communication et collaboration de la part des élèves.
- e. **Lien avec la recherche en mathématiques** : Les activités de ce module sont beaucoup plus proches de la recherche en mathématiques que les exercices de mathématiques traditionnelles que nous trouvons dans les livres. Ce module invite les élèves à « être mathématiciens pour un jour » : à découvrir des curiosités mathématiques, à les formuler sous forme de conjectures et à les prouver.

⁷ https://edumedia.lu/wp-content/uploads/2024/12/Medienkompass_FR_web.pdf

Planification détaillée de la leçon

Durée	Phases	Focus	Formes sociales / Méthodes	Matériels / Supports	Processus d'apprentissage
Première leçon					
15'	Entrée en matière	Conjecture	Plénière Travail individuel	M1 & M2	Les élèves... ... connaissent la définition d'une conjecture. ... savent lire et interpréter un énoncé mathématique. ... savent produire plusieurs exemples à partir d'un exemple donné.
30'	Phase de travail I	Exemples et conjectures	Travail en petits groupes	M1 & M2 Feuilles et/ou tablettes	Les élèves... ... savent produire plusieurs exemples à partir d'un exemple donné. ... savent mettre ensemble leurs exemples trouvés individuellement. ... savent formuler une conjecture mathématique basée sur des exemples.
Deuxième heure d'enseignement					
35'	Phase de travail II	Preuve	Travail en petits groupes	M1 & M2 Feuilles et/ou tablettes	Les élèves... ... savent raisonner sur un problème mathématique. ... font leurs premières tentatives de formulation de preuves.
10'	Conclusion	Différentes conjectures	Plénière	M1 & M2	Les élèves... ... voient différents types de conjectures. ... valorisent et connaissent la nécessité d'une preuve mathématique.
Troisième heure d'enseignement					
10'	Correction	Correction des copies	Travail individuel ou en petits groupes	M1 & M2	Les élèves... ... relisent leur travail. ... évaluent leurs erreurs et la qualité de leur rédaction.
10'	Entrée en matière	Conjecture	Travail individuel	M1 & M2	Les élèves... ... connaissent la définition d'une conjecture. ... savent lire et interpréter un énoncé mathématique. ... savent produire plusieurs exemples à partir d'un exemple donné.

25'	Phase de travail I	Exemples et conjectures	Travail en petits groupes	M1 & M2 Feuilles et/ou tablettes	Les élèves... ... savent produire plusieurs exemples à partir d'un exemple donné. ... savent mettre ensemble leurs exemples trouvés individuellement. ... savent formuler une conjecture mathématique basée sur des exemples.
Quatrième heure d'enseignement					
35'	Phase de travail II	Preuve	Travail en petits groupes	M1 & M2 Feuilles et/ou tablettes	Les élèves... ... savent raisonner sur un problème mathématique. ... font leurs premières tentatives de formulation de preuves. ... découvrent le concept de contre-exemple.
10'	Conclusion	Différentes conjectures	Plénière	M1 & M2	Les élèves... ... voient différents types de conjectures. ... valorisent et connaissent la nécessité d'une preuve mathématique.
Cinquième et sixième heure d'enseignement					
(Plan identique à la 3e et 4e heure)					
Septième (Cinquième) heure d'enseignement					
10'	Correction	Correction des copies	Travail individuel ou en petits groupes	M1 & M2	Les élèves... ... relisent leur travail. ... évaluent leurs erreurs et la qualité de leur rédaction.
5'	Mise en place	Installation	Installation des groupes	Chaises bancs	/
18'	Phase I	Interprétation d'affirmations mathématiques	Travail en groupes	M3	Les élèves... ... analysent des affirmations mathématiques. ... appliquent leurs connaissances des leçons précédentes pour évaluer la véracité d'une proposition. ... formulent une conclusion.
7'	Phase II	Exposé oral	Travail en groupes	M3	Les élèves... ... présentent leurs découvertes.

					... écoutent activement et questionnent. ... établissent des connexions entre leur travail et celui des autres groupes.
5'	Clôture	Vocabulaire mathématique	Plénière	M3	Les élèves... ... présentent leurs découvertes. ... font le point sur ce qu'ils ont retenu.

1.3 Matériels pédagogiques

M1 Version libre

01 | Un drôle de calcul

Énoncé

1. Choisis un nombre.
2. Multiplie-le par 3.
3. Ajoute 6.
4. Divise ce résultat par 3.
5. Soustrais le nombre choisi à l'étape 1 de la réponse de l'étape 4.

Exploration

Teste l'énoncé sur au moins 3 exemples. Peux-tu donner d'autres exemples ?

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

02 | Joyeux anniversaire !

Énoncé

Prends le numéro du mois de ton anniversaire (1 pour janvier, 2 pour février, ...) et multiplie-le par 2. Ajoute 5, puis multiplie le résultat par 50. Ajoute le jour du mois de ton anniversaire. Retranche 250. Tu obtiens un nombre à 4 ou 3 chiffres.

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

03 | Multiplier par 9

Énoncé

Choisis un nombre entre 1 et 10. Multiplie-le par 9. Additionne les chiffres du nouveau nombre et ajoutes-y 4. Que se passe-t-il ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

04 | Multiplier par 6

Énoncé

Prends un nombre pair et multiplie-le par 6. Compare le chiffre des unités avec celui du nombre choisi au départ. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

05 | Trois chiffres se transforment en six chiffres

Énoncé

1. Choisis un nombre à trois chiffres et écris-le deux fois à la suite pour obtenir un nombre à six chiffres. Par exemple, 371371 ou 552552.
2. Divise le nombre par 7.
3. Divise le résultat par 11.
4. Divise le résultat par 13.

Exploration

Analyse quelques exemples. Tu peux utiliser un tableur ou une calculatrice pour effectuer les calculs.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

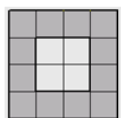
06 | Des carreaux de mosaïque

Énoncé

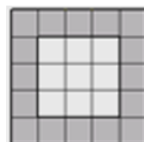
Voici des carreaux de mosaïque. Des carreaux gris sont disposés autour de différents carrés formés de carreaux blancs. En voici quatre exemples.



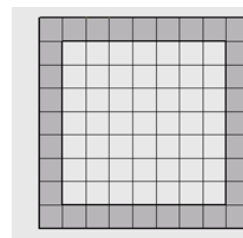
Carré Taille 1



Carré Taille 2



Carré Taille 3



Carré Taille 7

Compte les carreaux gris. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples. Tu peux utiliser un tableur ou une calculatrice pour effectuer les calculs.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

07 | Le calendrier

Énoncé

On peut grouper les cases de chaque mois de ce calendrier en carrés de différentes tailles :

janvier 1							février 2							mars 3						
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14	8	9	10	11	12	13	14
11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21	15	16	17	18	19	20	21
18	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	28	22	23	24	25	26	27	28
25	26	27	28	29	30	31								29	30	31				
avril 4							mai 5							juin 6						
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4						1	2		1	2	3	4	5	6
5	6	7	8	9	10	11	3	4	5	6	7	8	9	7	8	9	10	11	12	13
12	13	14	15	16	17	18	10	11	12	13	14	15	16	14	15	16	17	18	19	20
19	20	21	22	23	24	25	17	18	19	20	21	22	23	21	22	23	24	25	26	27
26	27	28	29	30			24	25	26	27	28	29	30	28	29	30				
							31													

Étape 1 : Dessine quelques carrés sur le calendrier.

- Commence par dessiner des carrés de 2×2 jours.
- Puis essaie avec des carrés de 3×3 jours.

Étape 2 : Pour chaque carré que tu as dessiné :

- Multiplie le nombre en haut à droite avec le nombre en bas à gauche.
- Multiplie le nombre en haut à gauche avec le nombre en bas à droite.
- Calcule la différence entre ces deux produits.

Voici deux exemples :

février 2						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

$$11 \cdot 17 - 10 \cdot 18 = 7$$

mai 6						
L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

$$14 \cdot 26 - 12 \cdot 28 = 28$$

Que constate-t-on ?

Exploration

Analyse quelques exemples. Tu peux utiliser un tableur ou la calculatrice pour effectuer les calculs.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

08 | Somme des nombres impairs

Énoncé

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 5 &= 9 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25\end{aligned}$$

Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

09 | Ajouter 41 ?

Énoncé

Choisis un nombre naturel n . Multiplie-le par lui-même. Ajoute au résultat le nombre choisi au départ, puis ajoute 41. Commence par $n = 0$, puis passe à $n = 1$ et ainsi de suite. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

10 | Des 3 suivis d'un 1

Énoncé

Quels sont les diviseurs de 31 ? De 331 ? Et de 3331 ? Que constates-tu ?

Exploration

Analyses quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

11 | Des puissances de 2 un peu particulières

Énoncé

Prends un nombre naturel n . Élève 2 à la puissance n pour obtenir le résultat m . Puis, élève 2 à la puissance m . Ajoute 1 au résultat.

Commence par $n = 0$, puis passe à $n = 1$ et ainsi de suite. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

12 | Trouver des diviseurs communs

Énoncé

Prends un nombre naturel n . Calcule la valeur de $A = n^2 + 7$ et de $B = (n + 1)^2 + 7$, puis essaie de trouver des diviseurs communs de A et de B . Commence par $n = 0$, puis passe à $n = 1$ et ainsi de suite. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

13 | Nombres pairs et nombres premiers

Énoncé

$$\begin{aligned}4 &= 2 + 2 \\6 &= 3 + 3 \\8 &= 5 + 3 \\10 &= 7 + 3 \\12 &= 7 + 5 \\14 &= 7 + 7 \\16 &= 11 + 5\end{aligned}$$

Reconnais-tu un schéma ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

14 | Un algorithme qui colle ?

Énoncé

Choisis un nombre entier strictement positif.

- S'il est pair, on le divise par 2.
- S'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 au résultat.

Répète cette opération un grand nombre de fois afin de rendre le résultat le plus petit possible.

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

15 | Une somme de 4 cubes

Énoncé

$$1 = 1^3 + 0^3 + 0^3 + 0^3$$

$$2 = 1^3 + 1^3 + 0^3 + 0^3$$

$$3 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 0^3$$

$$4 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$$

$$5 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3$$

Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

M2 Version guidée

01 | Un drôle de calcul

Énoncé

1. Choisis un nombre.
2. Multiplie-le par 3.
3. Ajoute 6.
4. Divise ce résultat par 3.
5. Soustrais le nombre choisi à l'étape 1 de la réponse de l'étape 4.

Exploration

Analyse quelques exemples en complétant le tableau suivant. Tu peux utiliser un tableur ou une calculatrice pour effectuer les calculs.

	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3	Exemple 4
Choisis un nombre.				
Multiplie-le par 3.				
Ajoute 6.				
Divise par 3.				
Soustrais le nombre de la première ligne du nombre de la 4 ^e ligne.				

Conjecture

Décris le phénomène observé :

Si on effectue l'algorithme décrit ci-dessus, on obtient toujours

_____.



Une preuve ?

Est-ce que cette conjecture est toujours vraie ? On peut le **prouver** en utilisant les techniques du **calcul littéral**.

Appelons n le nombre choisi au début.

Répetons les calculs effectués lors de l'exploration (mais en utilisant n) :

Choisis un nombre.	n
Multiplie-le par 3.	
Ajoute 6.	
Divise par 3.	
Soustrais le nombre de la première ligne du nombre de la 4 ^e ligne.	
Effectue et réduit l'expression.	

Le résultat final est égal à _____, peu importe le nombre n avec lequel on commence.

Conclusion

	  
Si on effectue l'algorithme suivant : 1. Choisis à un nombre. 2. Multiplie-le par 3. 3. Ajoute 6. 4. Divise ce résultat par 3. 5. Soustrais le nombre du début de l'étape 1 de la réponse de l'étape 4. Alors on obtient toujours le résultat final _____.	

02 | Joyeux anniversaire !

Énoncé

Prends le numéro du mois de ton anniversaire (1 pour janvier, 2 pour février, ...) et multiplie-le par 2. Ajoute 5, puis multiplie le résultat par 50. Ajoute le jour du mois de ton anniversaire. Retranche 250. Tu obtiens un nombre à 4 ou 3 chiffres.

Exploration

Analyse quelques exemples en complétant le tableau suivant. Tu peux utiliser un tableur ou une calculatrice pour effectuer les calculs.

	Élève 1	Élève 2	Élève 3	Élève 4
Prends le mois de ton anniversaire.				
Multiplie par 2.				
Ajoute 5.				
Multiplie par 50.				
Ajoute le jour de l'anniversaire.				
Retranche 250.				

Compare les résultats finaux avec les anniversaires du début.

Conjecture

Complète le texte suivant pour décrire le phénomène observé :

Le résultat final affiche la _____ d'un anniversaire de la façon suivante :

6. Le nombre formé par le chiffre des _____ et le chiffre des _____ du résultat final représente le mois de l'anniversaire.
7. Le nombre formé par le chiffre des _____ et le chiffre des _____ du résultat final représente le _____ de l'anniversaire.



Une preuve ?

Est-ce que cette règle fonctionne toujours ? Pour le savoir, il y a deux possibilités :

Possibilité 1 :

Essaie avec **toutes les dates** possibles : du 01.01 au 31.12. Combien de cas faut-il vérifier ?

Pour évaluer un tel nombre de cas différents, il est conseillé d'utiliser un **tableur** ou un **langage de programmation** pour automatiser les calculs.

Après évaluation de tous les cas nous constatons que

Possibilité 2 :

Nous allons essayer de **prouver** la conjecture en utilisant les techniques du **calcul littéral**.

Appelons le jour de l'anniversaire d'une personne j .

Appelons le mois d'une personne m .

Prends le mois de l'anniversaire.	m
Multiplie par 2.	
Ajoute 5.	
Multiplie par 50.	
Ajoute le jour de l'anniversaire.	
Retranche 250.	
Effectue et réduis l'expression obtenue.	

Le résultat final est égal à _____.

Les deux derniers chiffres de ce résultat représentent _____.

Le premier ou les deux premiers chiffres de ce résultat représente(nt) _____.

Conclusion



En effet, si on suit l'algorithme suivant :

Prends le numéro du mois de ton anniversaire.

Multiplie par 2.

Ajoute 5.

Multiplie par 50.

Ajoute le jour du mois de ton anniversaire.

Retranche 250.

Alors on obtient :

- un nombre à trois chiffres si le mois de l'anniversaire est inférieur ou égal à _____. Le chiffre des centaines de ce nombre représente le _____ et les deux derniers chiffres représentent le _____ de l'anniversaire.
- un nombre à quatre chiffres si le mois de l'anniversaire est supérieur ou égal à _____. Le chiffre des centaines de ce nombre représente le _____ et les deux derniers chiffres représentent le _____ de l'anniversaire.

03 | Multiplier par 9

Énoncé

Choisis un nombre entier entre 1 et 10. Multiplie-le par 9. Additionne les chiffres du nouveau nombre et ajoutes-y 4. Que se passe-t-il ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3	Exemple 4	Exemple 5
Choisis un nombre compris entre 1 et 10.	1	2	3	4	5
Multiplie par 9.					
Additionne les chiffres.					
Ajoute 4.					

Nous constatons que le résultat de cet algorithme semble toujours être égal à _____.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Si on prend un nombre compris entre 1 et 10, le multiplie par 9, puis calcule la somme des chiffres du résultat et finalement on y ajoute 4, **alors** on obtient le nombre _____.



Une preuve ?

En fait, il nous reste uniquement _____ autres cas à vérifier. Si nous arrivons à vérifier notre règle pour ces cas, notre conjecture est prouvée :

Choisis un nombre compris entre 1 et 10.					
Multiplie-le par 9.					
Additionne les chiffres.					
Ajoute 4.					

La règle fonctionne-t-elle également pour des nombres plus grands que 10 ? Essaie quelques exemples :

Choisis un nombre supérieur à 10					
Multiplie-le par 9.					
Additionne les chiffres.					
Ajoute 4.					

Que peux-tu conclure ?

La règle	☐	fonctionne	pour des nombres supérieurs à 10.
	☐	ne fonctionne pas	

Conclusion

En effet, si on prend n'importe quel nombre entier compris entre 1 et 10 et si on suit l'algorithme suivant : <table border="1"> <tr><td>Multiplie-le par 9.</td></tr> <tr><td>Additionne les chiffres.</td></tr> <tr><td>Ajoute 4.</td></tr> </table> Alors on obtient toujours le résultat final _____.	Multiplie-le par 9.	Additionne les chiffres.	Ajoute 4.	☒ ☐ ☐
Multiplie-le par 9.				
Additionne les chiffres.				
Ajoute 4.				

04 | Multiplier par 6

Énoncé

Prends un nombre pair et multiplie-le par 6. Compare le chiffre des unités avec celui du nombre choisi au départ. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3	Exemple 4
Choisis un nombre pair.	4	12		
Multiplie-le par 6.				
Chiffre des unités du résultat.				
Chiffre des unités du nombre choisi au départ.				

Il semble que le chiffre des unités du résultat de cet algorithme est toujours égal _____.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Si un nombre pair est multiplié par 6, alors le chiffre des unités du résultat est égal _____.



Une preuve ?

Appelons le nombre du début n .

Comme n est pair, n peut s'écrire comme...	
Multiplie-le par 6.	
Effectue l'expression.	

Le résultat final est égal à _____.

Écris ce résultat comme somme de deux termes :

_____ = _____ + _____



Le chiffre des unités se trouve ici.

Le chiffre des unités est égal _____.

Conclusion

En effet, nous avons réussi à démontrer le théorème suivant :

Si un nombre pair est multiplié par 6, alors le chiffre des unités du résultat est égal _____.



05| Trois chiffres se transforment en six chiffres

Énoncé

1. Choisis un nombre à trois chiffres et écris-le deux fois à la suite pour obtenir un nombre à six chiffres. Par exemple, 371371 ou 552552.
2. Divise le nombre par 7.
3. Divise le résultat par 11.
4. Divise le résultat par 13.

Exploration

Analyse quelques exemples en complétant le tableau suivant. Tu peux utiliser un tableur ou une calculatrice pour effectuer les calculs.

	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3	Exemple 4
Choisis un nombre à trois chiffres				
Écris-le deux fois pour obtenir un nombre à 6 chiffres.				
Divise-le par 7.				
Divise-le par 11.				
Divise-le par 13.				

Conjecture

Décris le phénomène observé :

Si on choisit un nombre à 3 chiffres et on effectue l'algorithme décrit ci-dessus, on obtient _____.



Une preuve ?

Est-ce que cette règle fonctionne toujours ? Pour le vérifier, on peut utiliser les techniques du **calcul littéral**.

Appelons n le nombre à 3 chiffres du début.

Étape 1 :

Construisons le nombre à 6 chiffres obtenu en répétant deux fois le nombre n .

Aide : Sers-toi de ta calculatrice. Tape le nombre à 3 chiffres n . Quel calcul peux-tu effectuer pour que la calculatrice affiche le nombre à 6 chiffres composés de deux fois le nombre à 3 chiffres.

Le nombre à 6 chiffres s'écrit de la manière suivante (en utilisant n) : _____

Étape 2 :

Continuons maintenant à exécuter l'algorithme.

Choisis un nombre à trois chiffres.	n
Écris-le deux fois pour obtenir un nombre à 6 chiffres.	
Divise-le par 7.	
Divise-le par 11.	
Divise-le par 13.	
Écris l'expression sous forme de fraction.	
Effectue et simplifie la fraction autant que possible.	

Le nombre obtenu est : _____

Conclusion



Si on choisit un nombre à trois chiffres et on applique l'algorithme suivant :

1. Écris-le deux fois pour obtenir un nombre à six chiffres.
2. Divise le nombre par 7.
3. Divise le résultat par 11.
4. Divise le résultat par 13.

alors on obtient toujours _____ .

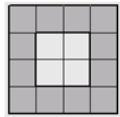
06 | Des carreaux de mosaïque

Énoncé

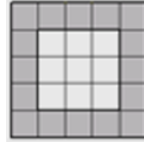
Voici des carreaux de mosaïque. Des carreaux gris sont disposés autour de différents carrés formés de carreaux blancs. En voici quatre exemples.



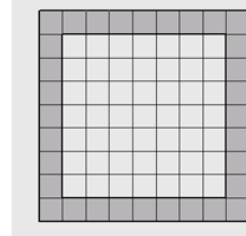
Carré Taille 1



Carré Taille 2



Carré Taille 3



Carré Taille 7

Compte les carreaux gris. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples en complétant le tableau suivant.

Taille du carré blanc	Dessin	Nombre de carreaux gris
4		
5		
6		

Conjecture

Décris le phénomène observé :

Le nombre de carreaux gris entourant un carré de taille n est égal à

_____.



Une preuve ?

Est-ce que cette règle fonctionne toujours ? Pour le vérifier, on peut utiliser les techniques du **calcul littéral**.

Appelons n la taille du carré blanc.

La taille du carré blanc.	n
La taille du carré blanc et gris.	
Le nombre de carreaux gris.	
Développe et simplifie.	

Si le carré blanc est de taille n , le nombre de carreaux gris est _____.

Conclusion

Le nombre de carreaux gris entourant un carré de taille n est égal à	
_____.	

07 | Le calendrier

Énoncé

On peut grouper les cases de chaque mois de ce calendrier en carrés de différentes tailles :

janvier 1							février 2							mars 3						
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14	8	9	10	11	12	13	14
11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21	15	16	17	18	19	20	21
18	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	28	22	23	24	25	26	27	28
25	26	27	28	29	30	31								29	30	31				
avril 4							mai 5							juin 6						
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4						1	2		1	2	3	4	5	6
5	6	7	8	9	10	11	3	4	5	6	7	8	9	7	8	9	10	11	12	13
12	13	14	15	16	17	18	10	11	12	13	14	15	16	14	15	16	17	18	19	20
19	20	21	22	23	24	25	17	18	19	20	21	22	23	21	22	23	24	25	26	27
26	27	28	29	30			24	25	26	27	28	29	30	28	29	30				
							31													

Étape 1 : Dessine quelques carrés sur le calendrier.

- Commence par dessiner des carrés de 2×2 jours.
- Puis essaie avec des carrés de 3×3 jours.

Étape 2 : Pour chaque carré que tu as dessiné :

- Multiplie le nombre en haut à droite avec le nombre en bas à gauche.
- Multiplie le nombre en haut à gauche avec le nombre en bas à droite.
- Calcule la différence entre ces deux produits.

Voici deux exemples :

février 2						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

$$11 \cdot 17 - 10 \cdot 18 = 7$$

mai 6						
L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

$$14 \cdot 26 - 12 \cdot 28 = 28$$

Que constate-t-on ?

Exploration

Dessine des carrés de différentes tailles dans le calendrier suivant. Complète ensuite le tableau.

janvier 1	février 2	mars 3
L M M J V S D	L M M J V S D	L M M J V S D
1 2 3	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10	8 9 10 11 12 13 14	8 9 10 11 12 13 14
11 12 13 14 15 16 17	15 16 17 18 19 20 21	15 16 17 18 19 20 21
18 19 20 21 22 23 24	22 23 24 25 26 27 28	22 23 24 25 26 27 28
25 26 27 28 29 30 31		29 30 31
avril 4	mai 5	juin 6
L M M J V S D	L M M J V S D	L M M J V S D
1 2 3 4	1 2	1 2 3 4 5 6
5 6 7 8 9 10 11	3 4 5 6 7 8 9	7 8 9 10 11 12 13
12 13 14 15 16 17 18	10 11 12 13 14 15 16	14 15 16 17 18 19 20
19 20 21 22 23 24 25	17 18 19 20 21 22 23	21 22 23 24 25 26 27
26 27 28 29 30	24 25 26 27 28 29 30	28 29 30
	31	
juillet 7	août 8	septembre 9
L M M J V S D	L M M J V S D	L M M J V S D
1 2 3 4	1	1 2 3 4 5
5 6 7 8 9 10 11	2 3 4 5 6 7 8	6 7 8 9 10 11 12
12 13 14 15 16 17 18	9 10 11 12 13 14 15	13 14 15 16 17 18 19
19 20 21 22 23 24 25	16 17 18 19 20 21 22	20 21 22 23 24 25 26
26 27 28 29 30 31	23 24 25 26 27 28 29	27 28 29 30
	30 31	
octobre 10	novembre 11	décembre 12
L M M J V S D	L M M J V S D	L M M J V S D
1 2 3	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5
4 5 6 7 8 9 10	8 9 10 11 12 13 14	6 7 8 9 10 11 12
11 12 13 14 15 16 17	15 16 17 18 19 20 21	13 14 15 16 17 18 19
18 19 20 21 22 23 24	22 23 24 25 26 27 28	20 21 22 23 24 25 26
25 26 27 28 29 30 31	29 30	27 28 29 30 31

Carré de taille	Nombre coin supérieur droit	Nombre coin inférieur gauche	Produit des deux	Nombre coin supérieur gauche	Nombre coin inférieur droite	Produit des deux	Différence
2							
2							
2							
3							

3							
3							
4							
4							
4							

Conjecture

Décris le phénomène observé :

Nous constatons que la différence entre le produit du nombre situé dans le coin supérieur droit avec le nombre situé dans le coin inférieur gauche et le produit du nombre situé dans le coin supérieur gauche avec le nombre situé dans le coin inférieur droit d'un carré de taille n est égal à

_____.



Une preuve ?

Est-ce que cette règle fonctionne toujours ? Pour le vérifier, on peut utiliser les techniques du **calcul littéral**.

Appelons n la taille du carré et appelons a le nombre dans le coin supérieur gauche.

Coin supérieur gauche	a
Coin supérieur droit	
Coin inférieur gauche	
Coin inférieur droit	
Produit du nombre dans le coin supérieur droit avec le nombre dans le coin supérieur gauche	
Produit du nombre dans le coin supérieur gauche avec le nombre dans le coin inférieur droit	
Différence des deux produits	
Effectuer le calcul et simplifier.	

Conclusion

La différence entre le produit du nombre situé dans le coin supérieur droite avec le nombre situé dans le coin inférieur gauche et le produit du nombre situé dans le coin supérieur gauche avec le nombre situé dans le coin inférieur droite d'un carré de taille n est égal à _____.



08 | Somme des nombres impairs

Énoncé

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 + 3 &= 4 \\
 1 + 3 + 5 &= 9 \\
 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\
 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\dots \\
 1 + 3 + 5 + \dots + 197 + 199 &= 100\,000
 \end{aligned}$$

Que constates-tu ?

Exploration

Utilise un tableur ou une calculatrice pour compléter le tableau suivant :

Étape k	
1	$1 =$ $=$
2	$1 + 3 =$ $=$
3	$1 + 3 + 5 =$ $=$
4	$1 + 3 + 5 + 7 =$ $=$
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$ $=$
6	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$ $=$
7	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$ $=$

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

La somme des k nombres impairs est un _____ et est égal
à _____.



Une preuve ?

Nous allons prouver la conjecture pour des sommes allant jusqu'à 100. Il y a _____ cas à vérifier. Comme ce nombre est relativement grand, il est raisonnable d'utiliser un **tableur** ou une **langue de programmation** :

Dans ce cas, nous te proposons d'utiliser un tableur (comme Excel, Numbers, Google Sheets, ...) et de dresser une liste comparable à celle-ci-dessous :

	A	B	C	D	E
1	Étape k	k-ième nombre impair	somme des k premiers nombres impairs consécutifs	Conjecture	Contrôle
2					
3	1	1	1	1	TRUE
4	2	3	4	4	TRUE
5	3	5	9	9	TRUE
6	4	7	16	16	TRUE
7	5	9	25	25	TRUE
8	6	11	36	36	TRUE
9	7	13	49	49	TRUE
10	8	15	64	64	TRUE
11	9	17	81	81	TRUE
12	10	19	100	100	TRUE
13	11	21	121	121	TRUE
14	12	23	144	144	TRUE
15	13	25	169	169	TRUE

Pour vérifier tous les cas possibles, il est clair que tu dois travailler avec des **formules** :

Dans la colonne A, on commence par écrire 1 dans la case A3. Puis dans la case A4, on écrit une formule qui ajoute 1 à la case du dessus (A3+1). Ensuite, on tire cette formule vers le bas pour remplir toute la colonne. On obtient ainsi : 1, 2, 3, 4...

	A	B	C	D	E
1	Étape k	k-ième nombre impair	somme des k premiers nombres impairs consécutifs	Conjecture	Contrôle
2					
3	1				
4	=A3+1				
5					
6					

Dans la colonne B, on écrit aussi 1 dans la case B3. Mais dans la case B4, on ajoute 2 à la case du dessus (B3+2). On tire cette formule vers le bas. On obtient : 1, 3, 5, 7...

	A	B	C	D	E
1	Étape k	k-ième nombre impair	somme des k premiers nombres impairs consécutifs	Conjecture	Contrôle
2					
3	1	1			
4	2	=B3+2			
5	3				
6	4				

Pour la colonne C, dans la case C4, on additionne la valeur de C3 avec celle de B4. Puis on tire cette formule vers le bas. Cette colonne nous permet de voir comment les nombres se cumulent.

	A	B	C	D	E
1	Étape k	k-ième nombre impair	somme des k premiers nombres impairs consécutifs	Conjecture	Contrôle
2					
3	1	1	1		
4	2		3 = C3+B4		
5	3		5		

Dans la colonne D, on va tester notre idée : on écrit notre formule dans la case D3 et on la tire vers le bas.

La colonne E nous servira à vérifier si notre idée est correcte ou non.

	A	B	C	D	E
1	Étape k	k-ième nombre impair	somme des k premiers nombres impairs consécutifs	Conjecture	Contrôle
2					
3	1	1	1	1	=C3=D3
4	2	3	4	4	
5	3	5	9	9	

De cette façon, il est facile de vérifier tous les cas pour k allant de 1 à _____.

Conclusion

La somme des k nombres impairs est un _____ et est égal à _____ (pour k allant de 1 à _____).	☒ ☐ ☐
--	--



La conjecture reste-elle vraie pour des valeurs de k supérieures à 100 ?



Effectue des recherches sur Internet ou demande de l'aide à une intelligence artificielle pour trouver des réponses !

09 | Ajouter 41

Énoncé

Choisis un nombre naturel n . Multiplie-le par lui-même. Ajoute au résultat le nombre choisi au départ, puis ajoute 41. Commence par $n = 0$, puis passe à $n = 1$ et ainsi de suite. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

n	Multiplie n par lui même	Ajoute n	Ajoute 41	Résultat final	Diviseurs du résultat final
0					
1					
2					
3					
4					
5					

Les résultats finaux sont tous des nombres _____.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Si on multiplie un nombre par soi-même, puis on ajoute le nombre choisi au départ et finalement on ajoute 41, on obtient _____.



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Vérifie ta conjecture jusqu'à $n=40$ et $n=41$. Utilise un tableur (ou fais-le à la main si ça t'amuse). Que constates-tu ?

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

10 | Des 3 suivis d'un 1

Énoncé

Quels sont les diviseurs de 31 ? De 331 ? Et de 3331 ? Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Nombre	Diviseurs
31	{1, 31}
331	
3331	

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Tous les nombres de la forme 333...1 sont des nombres _____.



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Vérifie ta conjecture jusqu'à la 8^e étape. Utilise un tableur (ou fais-le à la main si ça t'amuse). Que constates-tu ?

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

11 | Des puissances de 2 un peu particulières

Énoncé

Prends un nombre naturel n . Élève 2 à la puissance n pour obtenir le résultat m . Puis, élève 2 à la puissance m . Ajoute 1 au résultat.

Commence par $n = 0$, puis passe à $n = 1$ et ainsi de suite. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

n	2^n	2^{2^n}	$2^{2^n} + 1$
0	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2 + 1 = 3$
1	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$4 + 1 = 5$

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Tous les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont des nombres _____.



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Vérifie ta conjecture jusqu'à $n = 5$. Utilise une calculatrice ou un tableur pour faire les calculs. Utilise une intelligence artificielle ou un moteur de recherche pour vérifier ta conjecture. Que constates-tu ?

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

12 | Trouver des diviseurs communs

Énoncé

Prends un nombre naturel n . Calcule la valeur de $A = n^2 + 7$ et de $B = (n + 1)^2 + 7$, puis essaie de trouver des diviseurs communs de A et de B . Commence par $n = 0$, puis passe à $n = 1$ et ainsi de suite. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

n	$A = n^2 + 7$	$B = (n + 1)^2 + 7$	$\text{pgcd}(A, B)$
0	7	8	1
1	8	11	1

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Tous les nombres de la forme $n^2 + 7$ et $(n + 1)^2 + 7$ sont

.....



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Vérifie ta conjecture jusqu'à $n = 14$. Utilise une calculatrice ou un tableur pour faire les calculs. Que constates-tu ?

Conclusion

Écris un court commentaire pour résumer tes observations et réflexions.

13 | Nombres pairs et nombres premiers

Énoncé

$$\begin{aligned}
 4 &= 2 + 2 \\
 6 &= 3 + 3 \\
 8 &= 5 + 3 \\
 10 &= 7 + 3 \\
 12 &= 7 + 5 \\
 14 &= 7 + 7 \\
 16 &= 11 + 5 \\
 &\dots \\
 100 &= 41 + 59
 \end{aligned}$$

Reconnais-tu un schéma ?

Exploration

Analyse quelques exemples supplémentaires :

$16 = 11 + 5$	11 et 5 sont des nombres _____.
$18 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.
$20 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.
$22 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.
$24 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.
$26 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.
$28 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.
$30 =$	_____ et _____ sont des nombres _____.

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Tout nombre _____ inférieur ou égal à 100 peut s'écrire comme
somme de deux nombres _____.



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Effectue des recherches sur Internet ou demande de l'aide à une intelligence artificielle pour trouver des réponses !

Tu peux également utiliser le script suivant pour trouver des solutions :

```
main.py > ...  
1  import sympy  
2  
3  a=int(input('Enter an even number:'))  
4  
5  for p in sympy.primerange(0, 200):  
6      if sympy.isprime(a-p):  
7          print(a,'=',p,'+',a-p)  
8
```

Arrives-tu à réécrire tout nombre pair inférieur ou égal à 100 sous la forme d'une somme de deux nombres premiers ? ☐ Oui ☐ Non

Contre-exemple ?

_____.

Existe-t-il des nombres pairs supérieurs à 100 que l'on ne peut pas réécrire comme somme de deux nombres premiers ?

_____.

Conclusion

	  
Tout nombre _____ inférieur ou égal à 100 peut s'écrire comme somme de deux nombres _____.	
Tout nombre _____ peut s'écrire comme somme de deux nombres _____.	
Ce problème est connu sous le nom de _____.	

14 | Un algorithme qui se termine toujours ?

Énoncé

Choisis un nombre entier compris entre 1 et 100.

- S'il est pair, tu le divises par 2.
- S'il est impair, tu le multiplies par 3 et tu ajoutes 1 au résultat.

Répète cette opération un grand nombre de fois. Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples :

Nombre entier compris entre 1 et 100	Résultats intermédiaires	Résultat le plus petit
1	4; 2; 1; 4; 2; 1; ...	1
2	1; 4; 2; 1; 4; 2; 1; ...	1
3	10; 5; 16; 8; 4; 2; 1; 4; 2; 1; ...	1
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Pour des nombres entiers choisis entre 1 et 100, l'algorithme décrit ci-dessus aboutit toujours à la valeur _____ après un nombre fini d'itérations.



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Effectue des recherches sur Internet ou demande de l'aide à une intelligence artificielle pour trouver des réponses !

Nous te proposons également de tester la conjecture sur plusieurs cas sur le site suivant : <https://www.dcode.fr/conjecture-syracuse>

Pour tous les nombres compris entre 1 et 100, est-ce que l'algorithme aboutit toujours au nombre 1 après un nombre fini d'itérations ? ☐ Oui ☐ Non

Existe-il un contre-exemple ?

_____.

Et si tu prends des nombres de départ supérieurs à 100 ?

Conclusion

	  
Pour des nombres entiers choisis entre 1 et 100, l'algorithme décrit ci-dessus aboutit toujours à la valeur _____ après un nombre fini d'itérations.	
Pour n'importe quel nombre entier positif, l'algorithme décrit ci-dessus aboutit toujours à la valeur _____ après un nombre fini d'itérations. Ce problème est connu sous le nom de _____.	

15 | Une somme de 4 cubes

Énoncé

$$\begin{aligned}
 1 &= 1^3 + 0^3 + 0^3 + 0^3 \\
 2 &= 1^3 + 1^3 + 0^3 + 0^3 \\
 3 &= 1^3 + 1^3 + 1^3 + 0^3 \\
 4 &= 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 \\
 5 &= 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 \\
 &\dots \\
 13 &= 10^3 + 7^3 + 1^3 + (-11)^3
 \end{aligned}$$

Que constates-tu ?

Exploration

Analyse quelques exemples supplémentaires :

6 =	$8 - 1 - 1 + 0$	=
7 =	$8 - 1 + 0 + 0$	=
8 =		=
9 =		

Conjecture

En te basant sur les résultats de l'exploration précédente, essaie de formuler une règle générale :

Tout nombre entier compris entre 1 et 13 peut être réécrit comme la

_____.



Une preuve ?

Essaie d'expliquer pourquoi ta règle fonctionne toujours ou cherche des contre-exemples. Tu peux te servir des outils technologiques à ta disposition.



Effectue des recherches sur Internet ou demande de l'aide à une intelligence artificielle pour vérifier les cas restants !

10 =

=

11 =

=

12 =

=

Pour tous les nombres compris entre 1 et 13, est-il possible de les réécrire sous la forme d'une
_____ ? ☐ Oui ☐ Non

Existe-il un contre-exemple ?

_____.

Et si tu prends des nombres supérieurs à 13 ?

Conclusion



Tout nombre entier compris entre 1 et 13 peut être réécrit comme la

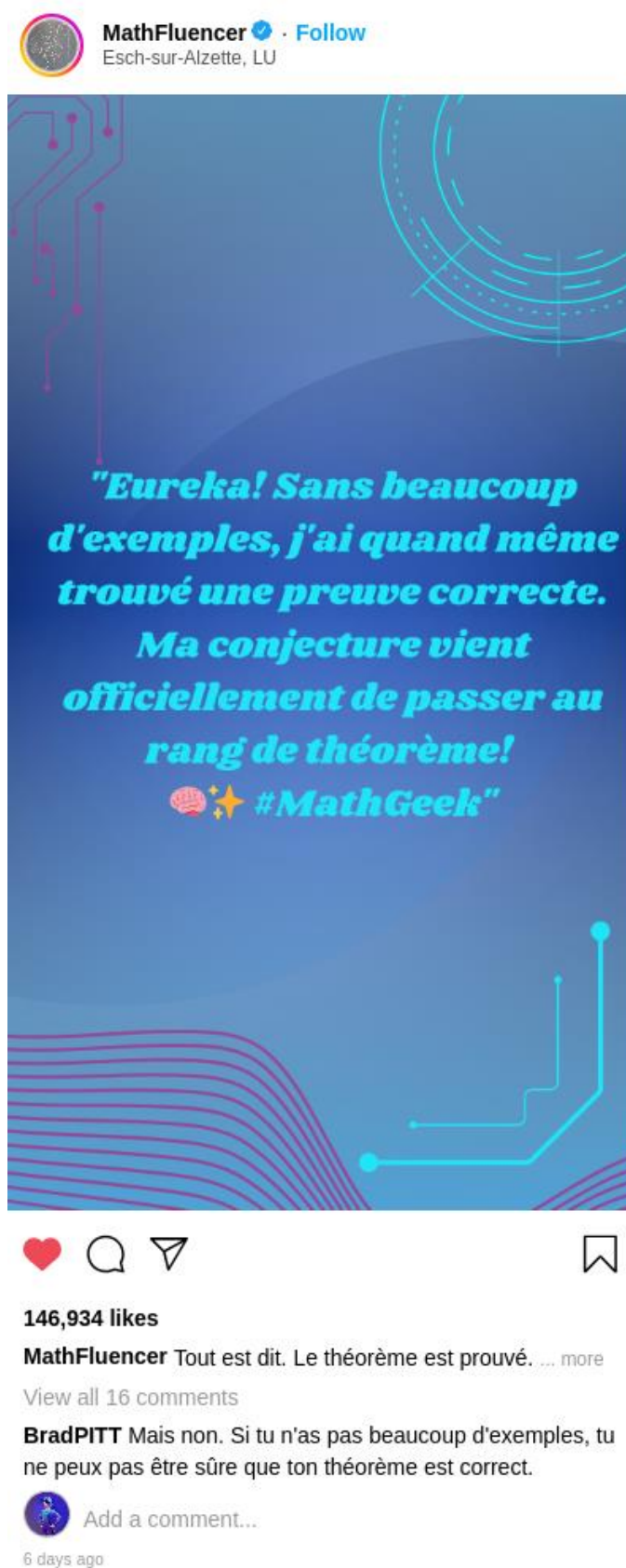
_____.

Tout **nombre entier positif** peut être réécrit comme la

_____.

Ce problème est connu sous le nom du _____.

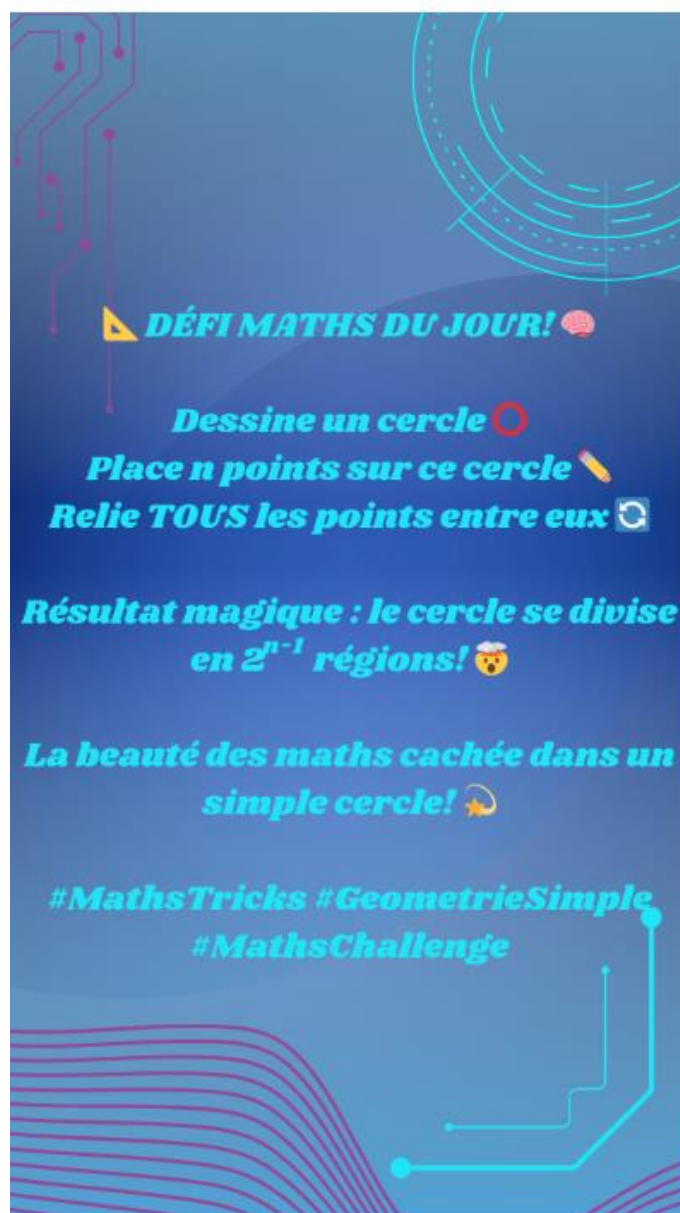
M3 Publications Instagram



Publication Instagram 1



MathFluencer · Follow
Esch-sur-Alzette, LU



146,934 likes

MathFluencer J'ai testé avec $n=1,2,3,4$ et 5 et c'est vérifié à chaque fois! ✅ Le résultat fonctionne parfaitement. Théorème confirmé! 🧠💡 #MathsVérifiées ... more

View all 16 comments

PITTstop Hmm...pas sûr moi...



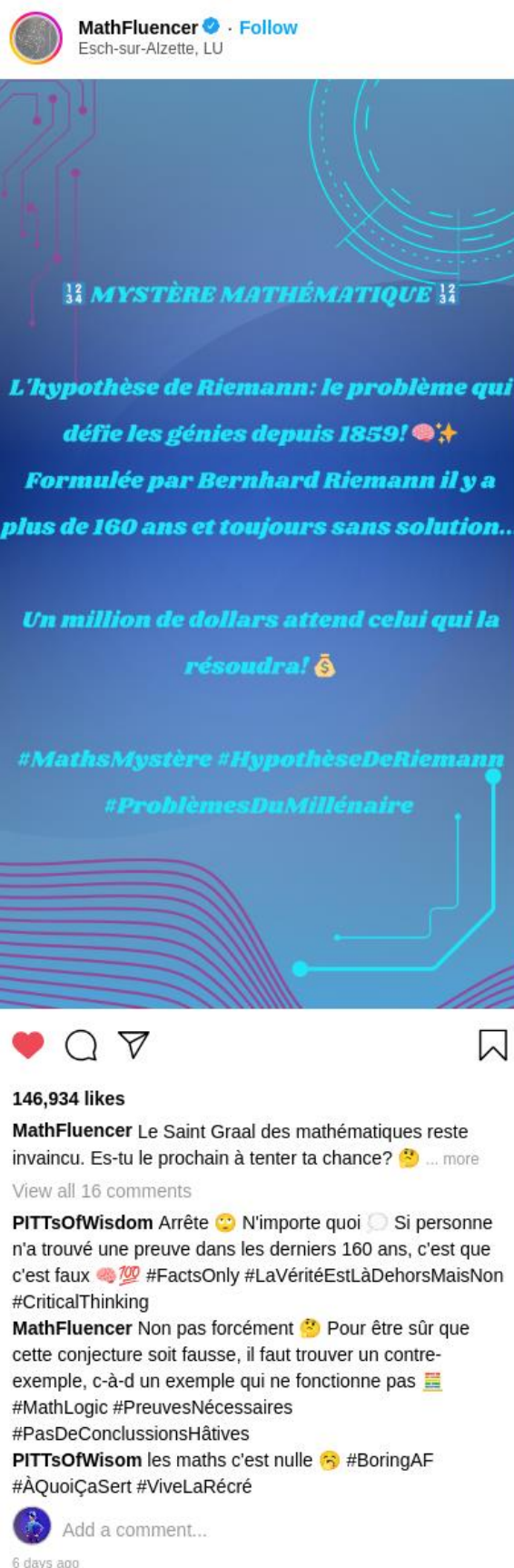
Add a comment...

6 days ago

Publication Instagram 2



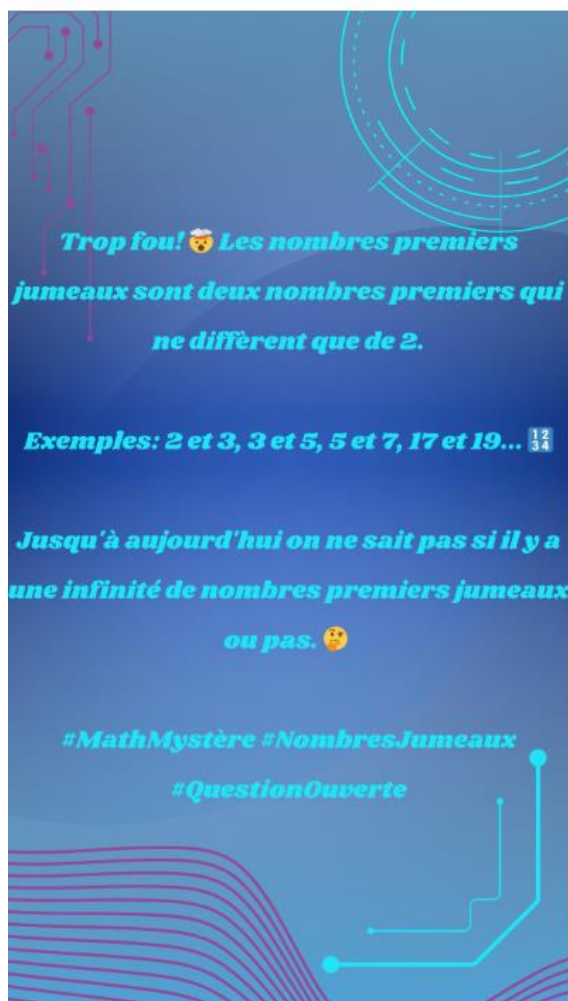
Publication Instagram 3



Publication Instagram 4



MathFluencer · Follow
Esch-sur-Alzette, LU



146,934 likes

MathFluencer Encore plus crazy : Régulièrement les mathématiciens découvrent de nouveaux nombres premiers jumeaux. Les plus grands nombres premiers jumeaux découverts à ce jour possèdent 388 342 chiffres! 🤪 11 14 ✨
#MathsFolles #NombresGéants #RecordsMathématiques
#ScienceIncroyable ... more

View all 16 comments

PITTsOfPassion Arrête tes conneries. Si on en découvre de plus en plus et si il y a en qui sont monstrueusement grands, c'est que ces nombres ne s'arrêtent jamais et il y a une infinité. 🤪 700 #LogiqueImparable #InfinitéConfirmée
#MathématiciensDuDimanche #JeRésoudsLesConjectures

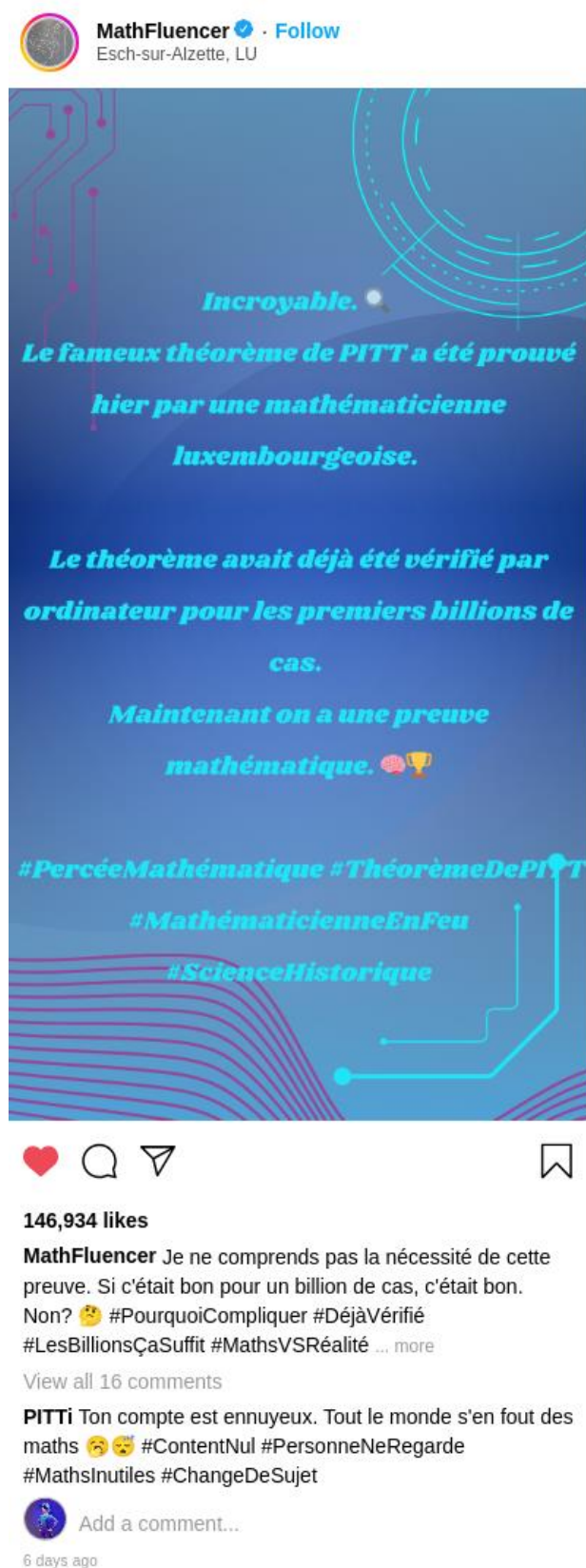
MathFluencer Ca a l'air, mais on ne peut jamais être sûr en mathématiques. Parfois une conjecture a l'air de fonctionner et foire quand même. 🤔 700 #MathsComplicées
#RienNestSûr #BesoinDePreuves
#ConjecturesVsThéorèmes



Add a comment...

6 days ago

Publication Instagram 5



Publication Instagram 6

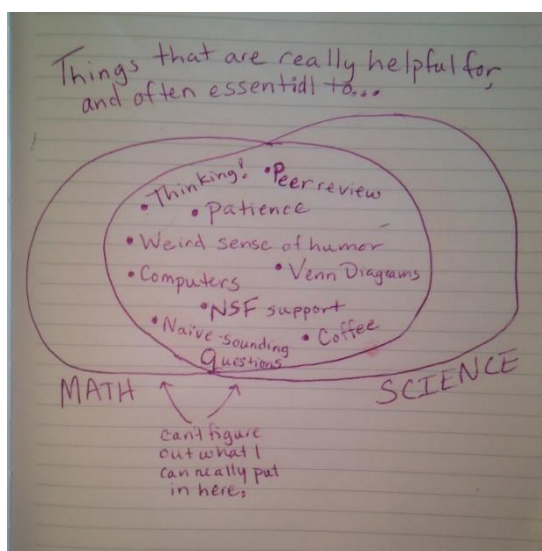
1.4 Idées interdisciplinaires

Sciences naturelles

L'un des objectifs premiers du cours de sciences naturelles est de transmettre une approche scientifique. Cela implique un mode de pensée scientifique dans le traitement des problèmes. Les élèves doivent apprendre la démarche expérimentale qui les place dans la position d'un chercheur scientifique et leur permet de construire leur savoir de manière autonome. Par démarche scientifique, on entend la collecte, la structuration et l'interprétation d'informations.⁸ Plus concrètement, les compétences suivantes sont visées :

1. Formuler des hypothèses fondées en fonction du contexte, à l'aide d'exemples.
2. Faire des observations ciblées, présenter et évaluer les résultats, et tirer des conclusions.
3. Reconnaître des relations simples de cause à effet et en tirer des conclusions logiques.
4. Représenter schématiquement et interpréter des modèles présentés.⁹

La démarche mathématique n'est pas la même que la démarche en sciences naturelles. Les théories scientifiques sont étayées par les expériences répétées, mais ne sont jamais démontrées, alors que nous pouvons réellement prouver des choses en mathématiques. Cependant il existe quand même aussi une grande ressemblance entre les deux. Le mathématicien Joseph Silverman explique dans (Silverman, 2012) qu'en théorie des nombres, nous recueillons des données en calculant un grand nombre d'exemples. Ensuite, nous recherchons un modèle, nous émettons une hypothèse et nous la testons à l'aide de données supplémentaires (plus d'exemples). Si l'hypothèse ne correspond pas aux nouvelles données, nous la révisons. Après quelques itérations, lorsque les nouvelles données correspondent à notre hypothèse, nous essayons finalement de la prouver. Ceci suit exactement le même schéma que les sciences naturelles.



Source : Math is Like Science, Only with Proof. Math. AMS Blogs. <https://blogs.ams.org/phdplus/2017/04/17/math-is-like-science-only-proof-y/>

⁸ Programme de Sciences Naturelles 7C et 6C.

⁹ idem

C'est cet aspect des sciences naturelles qui est mis en avant aussi dans ce module. Les élèves apprennent à faire des expériences (dans le contexte mathématique ceci revient à faire plusieurs exemples), à reconnaître des schémas et des modèles pour formuler une hypothèse et finalement la prouver ou la réfuter. En plus, l'utilisation des outils algébriques, comme le calcul littéral, participe à la mise en œuvre de la démarche scientifique, en complément de l'observation, la manipulation et l'expérimentation (Éduscol, 2016).

Vie et Société (VIESO)

Ce module montre aux élèves comment démontrer un fait en mathématique. L'idée est qu'en mathématique une conjecture est vraie si et seulement si elle est démontrée. Même si elle a été vérifiée sur un milliard d'exemples, elle reste une conjecture et nous ne pouvons pas être sûrs de sa véracité. Cette idée s'inscrit dans la question suivante, plus générale et philosophique :

Qu'est-ce que cela signifie que quelque chose est vrai ?

De manière un peu plus restrictive, on peut se demander quand quelque chose est vraie en sciences. Cette dernière idée est présente dans le programme de Vie et Société de la 6e secondaire dans le volet « Grandes Questions » dans le thème « Religion et Sciences Naturelles – Qu'est-ce que je peux savoir ? ».¹⁰

Themenfelder	Eigenverantwortung	Anerkennung und Ausgrenzung	Demokratie als Teilhabe und Mitgestaltung	Prozess und Auswirkungen von Globalisierung	Zeichen und Symbole im Alltag	Glauben Wissen Meinen
8 KL.	Gesundheit, Sucht und Risikoverhalten ----- Liebe ist...?	Geschlechterrollen ----- Jung und Alt: Generationen ----- Beeinträchtigung / Behinderung ----- Stereotypen und Vorurteile	Integration und Partizipation in Schule und Gesellschaft ----- Begegnungen mit versch. Religionen: Christentum	Armut, Wohlfahrt, Reichtum ----- Globalisierung ----- Nachhaltigkeit und Fairer Handel ----- Globale Umwelt-politik und lokales Leben	Ausdrucksformen in religiösen Gruppen und Gemeinschaften ----- Kleidung und Mode als Ausdrucksmöglichkeit	Religion und Naturwissenschaft ----- Was kann ich wissen? – Was darf ich hoffen?

Il est donc envisageable de discuter de ces questions pendant le cours de vie et société, simultanément à l'enseignement de ce module pendant le cours de mathématiques.

La fiche philosophique de Lumni ci-dessous aborde la distinction essentielle entre l'exemple et la preuve, une nuance conceptuelle fondamentale. Cette réflexion s'intègre parfaitement dans ce module, qui démontre mathématiquement les différences entre trois concepts épistémologiques clés : la preuve (démonstration rigoureuse et universelle), l'exemple (cas particulier illustratif) et le contre-exemple (cas particulier qui invalide une proposition générale).

¹⁰ Rahmenlehrplan für das Fach Leben und Gesellschaft / Vie et Société. https://vieso.script.lu/sites/default/files/2020-12/Rahmenlehrplan%20VIESO1_0.pdf

Lumni
Exemple / Preuve



<https://www.lumni.fr/article/exemple-preuve>

Penser les mathématiques : une approche philosophique

Le [web-documentaire « Paroles de déchiffreurs »](#) montre quatorze interviews avec des chercheurs travaillant dans différents domaines des mathématiques (plus d'information sous 1.5 Pour aller plus loin).

Le contenu de cette leçon se prête à une approche interdisciplinaire riche. La page web associée au web-documentaire contient les vidéos des interviews filmées, mais aussi les textes des interviews. La classe explorera ces textes variés, allant de biographies de mathématiciens à des interviews de chercheurs contemporains, offrant ainsi une base de discussion qui transcende les frontières traditionnelles entre les disciplines. Ces ressources permettront d'animer des débats stimulants touchant aussi bien aux mathématiques qu'à la philosophie, la physique, l'astronomie, et même l'histoire des sciences et des arts. Cette approche multidimensionnelle nous permettra de comprendre comment les mathématiques s'inscrivent dans un contexte plus large de la pensée et de la culture humaine.

Références

1. Éduscol. (2016). Utiliser le calcul littéral. <https://eduscol.education.fr/document/17263/download>
2. Silverman, J. (2012). *A Friendly Introduction to Number Theory. Chapter 1*. Fourth Edition. Pearson Education, Inc. ix + 409 + (56 online) pages. <https://www.math.brown.edu/johsilve/frint.html>

1.5 Pour aller plus loin

01 | La preuve : la vérité ultime en mathématiques

Comment savoir si quelque chose est vrai ou non ? On vous a certainement déjà dit que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° par exemple, mais comment en être sûr ? Et si vous rencontriez un extraterrestre qui n'a jamais étudié la géométrie de base ? Comment pourriez-vous le convaincre que ce fait est vrai ? D'une certaine manière, c'est là tout l'enjeu des mathématiques : concevoir de nouvelles affirmations, décider d'une manière ou d'une autre si elles sont vraies ou fausses, et expliquer ces résultats à d'autres personnes (ou extraterrestres, selon le cas).

En passant, vous pourriez même vous demander « Qu'est-ce que cela signifie pour quelque chose d'être vraie ? » Une discussion complète sur cette question devrait plonger dans la philosophie, la psychologie, et peut-être la linguistique, et nous ne voulons pas vraiment entrer dans ces domaines (pour plus d'inspiration, consultez la section 1.4 Idées interdisciplinaires.) L'idée principale, dans le contexte des mathématiques, est que quelque chose n'est vrai que si l'on peut démontrer qu'elle est toujours vraie. Nous savons que $1 + 1 = 2$ toujours et pour toujours. Qu'il soit minuit ou midi, nous pouvons être sûrs que cette équation restera vraie. (Avez-vous déjà réfléchi à la façon de démontrer un tel fait ? C'est en fait assez difficile ! Un livre intitulé *Principia Mathematica* (Whitehead & Russell, 1997) aborde cette question à partir des « premiers principes » et il faut aux auteurs de nombreuses pages pour arriver à $1 + 1 = 2$). Ceci est très différent d'autres sciences. Si nous réalisons une expérience physique 10 fois et que le même résultat se produit, savons-nous qu'il en sera toujours ainsi ? Et si nous réalisons l'expérience un million de fois ? Un milliard ? À quel moment avons-nous réellement prouvé quelque chose ? En mathématiques, l'expérimentation répétée n'est pas une preuve viable ! Il faudrait trouver un argument qui montre pourquoi un tel phénomène se produirait toujours. À titre d'exemple, la conjecture 13 de ce modèle est un célèbre problème ouvert appelé conjecture de Goldbach. On ne sait pas encore si elle est vraie ou non, même si elle a été vérifiée par des simulations informatiques jusqu'à une valeur d'environ 10^{18} . C'est un nombre énorme, mais il n'est pas encore suffisant pour savoir si la conjecture est vraie ou fausse. Voyez-vous la différence ? Les mathématiciens aiment prouver des faits. Le fait de vérifier un certain nombre de valeurs, mais pas toutes, ne constitue pas une preuve.¹¹

La preuve est donc ce qui rend les mathématiques différentes des autres sujets et ce qui caractérise les mathématiques. Si nous étions dans la Grèce antique, la science la plus récente nous dirait que quatre éléments composent toutes les choses : le feu, l'eau, la terre et l'air. Elle nous dirait aussi que dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Aujourd'hui nous croyons toujours un des deux faits, mais plus l'autre. La différence entre les deux : le théorème de Pythagore a été prouvé (Hart, 2024). Et un théorème qui a été prouvé une fois en mathématiques, même si sa preuve est vieille de plusieurs milliers d'années, restera vrai pour toujours. C'est là la grande différence entre les mathématiques et les autres sciences naturelles.

¹¹ Ce texte est la traduction du début du livre *Everything You Always Wanted To Know About Mathematics* (https://ia600408.us.archive.org/26/items/everything-you-always-wanted-to-know-about-mathematics/bws_book.pdf) que nous recommandons fortement aux lecteurs.

Une fois qu'il existe une preuve valide d'un théorème, cela suffit, en termes purement mathématiques. Il n'est pas nécessaire de le prouver à nouveau, et cela ne le rend pas « plus vrai ». Alors pourquoi certains résultats ont-ils de nombreuses preuves ? Le théorème de Pythagore en est un exemple. Avec des centaines de preuves, il est peut-être le théorème le plus prouvé de tous les temps. Plusieurs raisons expliquent cette multiplicité de preuves. Tout d'abord, le théorème a été remarqué dans de nombreuses cultures différentes. Même l'Égypte ancienne, qui ne connaissait probablement pas le résultat général, semble avoir su et utilisé le fait qu'un triangle 3-4-5 a un angle droit opposé au côté le plus long. Plus tard, dans les traditions grecque, indienne et chinoise, on trouve différentes preuves. Mais même lorsque les preuves du résultat étaient bien connues, les gens continuaient à en trouver de nouvelles. Dans le cas du théorème de Pythagore, il s'agit en quelque sorte d'un passe-temps mathématique, mais il arrive que la découverte d'une autre preuve d'un résultat permette de montrer des liens qui n'avaient pas été remarqués auparavant ou des généralisations potentielles. Parfois, en utilisant une nouvelle technique, on se rend compte que celle-ci peut être appliquée plus largement. En outre, il arrive souvent que la première preuve d'un théorème ne soit pas la meilleure - elle fait le travail, à voir prouver le résultat, mais des personnes ultérieures trouvent des arguments plus clairs et des chemins plus courts. Au fil des ans, les preuves peuvent être affinées et simplifiées, de sorte qu'il ne reste finalement qu'un beau noyau cristallin où le génie exquis de l'idée sous-jacente est mis en valeur (Hart, 2024). Considérons le problème 09 de ce module : à première vue il paraît que $n^2 + n + 41$ est toujours premier pour n'importe quel n . En tout cas, l'expression est un nombre premier pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Est-ce qu'elle donne donc toujours un nombre premier. La réponse est non (voir 1.7 Solutions). Une première preuve de ceci pourrait être de simplement tester toutes les valeurs de n les unes après les autres et de se rendre compte qu'en $n = 40$, l'expression donne 1681 qui n'est pas premier, car 1681 est divisible par 41. Une manière rapide de voir cette divisibilité (sans utilisation d'outils technologiques) est le calcul suivant :

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (40 + 1) = 41^2.$$

Ceci constitue certes une preuve mathématique complètement correcte, mais elle n'est pas très élégante. Une preuve plus élégante est de voir que si on prend $n = 41$, on obtient une somme de 3 termes dont chacun est divisible par 41 (la somme étant $41^2 + 41 + 41$) et donc toute l'expression est divisible par 41 et ne donne donc pas un nombre premier. Pour voir plus d'exemples de preuves élégantes, nous conseillons aux lecteurs de regarder la conférence *A Mathematician's View of a Proof* donnée par la mathématicienne anglaise Sara Hart.



<https://www.gresham.ac.uk/watch-now/mathematician-proof>

02 | Les grandes conjectures prouvées et encore ouvertes

« Les mathématiques sont un sujet vaste, en perpétuelle croissance et en constante évolution. Parmi les innombrables questions que les mathématiciens se posent, et auxquelles ils répondent pour la plupart, certaines se distinguent des autres : des pics proéminents qui dominent les charmants contreforts. Ce sont les vraies grandes questions, les problèmes difficiles et ardu, pour lesquels n'importe quel mathématicien donnerait son bras droit pour pouvoir résoudre. Certaines de ces questions sont restées sans réponse pendant des décennies, d'autres pendant des siècles, quelques-unes pendant des millénaires. D'autres n'ont pas encore été résolues. »¹² C'est ainsi que commence le livre *The Great Mathematical Problems* écrit par Ian Stewart (Stewart, 2014).

Le Dernier Théorème de Fermat

Un des problèmes les plus connus est le *Dernier Théorème de Fermat*. Le mathématicien français Pierre de Fermat a énoncé ce théorème dans une note marginale de son exemplaire du livre *Arithmétiques* de Diophante au 17^e siècle. À un endroit de ce livre, les triplets Pythagoriciens sont traités. Dans la marge, Fermat écrit :

Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.

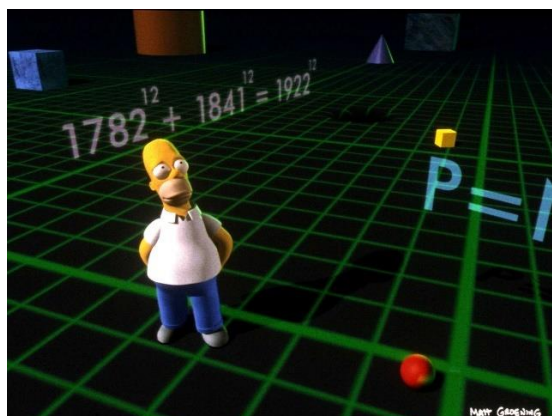
L'énoncé mathématique moderne est le suivant :

Dernier théorème de Fermat. Pour tout entier $n > 2$, il n'existe pas de triplet d'entiers strictement positifs (x, y, z) tels que l'équation suivante soit satisfaite :

$$x^n + y^n = z^n.$$

Les solutions triviales correspondent aux cas où l'un des termes est nul. Pendant plus de trois siècles, ce théorème est resté sans preuve.

Dans l'épisode *Treehouse of Horrors VI* de la série *The Simpsons*, on trouve une référence à ce fameux théorème de Fermat.



¹² Mathematics is a vast, ever-growing, ever-changing subject. Among the innumerable questions that mathematicians ask, and mostly answer, some stand out from the rest: prominent peaks that tower over the lovely foothills. These are the really big questions, the difficult and challenging problems, that any mathematician would give his or her right arm to solve. Some remained unanswered for decades, some for centuries, a few for millennia. Some have yet to be conquered.

Si l'équation derrière Homer Simpson était vraie, un contre-exemple au Dernier Théorème de Fermat aurait été trouvé. En calculant, on trouve que le côté gauche vaut

2541210258614589 ...

alors que le côté droit vaut

2541210259314801 ...

Les deux nombres ont 40 chiffres et leur 9 premiers chiffres sont les mêmes. Cependant, on voit très rapidement, sans calcul, que cette équation ne peut pas être correcte car le côté gauche est un nombre impair alors que le côté droite est un nombre pair.

De nombreux mathématiciens ont tenté de le démontrer, mais sans succès. Ce n'est qu'en 1994 que le mathématicien britannique Andrew Wiles a réussi à prouver ce théorème en utilisant des concepts avancés de la théorie des nombres et de la géométrie algébrique, notamment les courbes elliptiques et les formes modulaires. L'histoire derrière le mathématicien Wiles est impressionnante aussi. À l'âge de 10 ans, Andrew Wiles découvrit le *Dernier Théorème de Fermat*, une énigme mathématique vieille de plusieurs siècles. Cette rencontre marqua un tournant dans sa vie, et il fit le serment de devenir mathématicien plus tard et de résoudre ce mystère un jour. Pendant ses études en mathématiques, Wiles se spécialisa dans la théorie des nombres, une branche qui abritait ce fameux théorème. Cependant, plus il s'immergeait dans les arcanes des mathématiques, plus il percevait la complexité insaisissable du problème. Le théorème semblait hors de portée, et il abandonna temporairement son ambition. Mais le destin réserve parfois des surprises. D'autres mathématiciens firent le lien entre le *Dernier Théorème de Fermat* et les courbes elliptiques ainsi que les formes modulaires, des sujets dans lesquels Wiles était devenu un expert entre-temps. Pendant sept années intenses et secrètes, Wiles se consacra corps et âme à la preuve. En 1994, lors d'une série d'exposés, Wiles révéla enfin sa preuve au monde. L'annonce fit sensation, même dans les médias grand public, un événement rare pour une démonstration mathématique.



<https://www.youtube.com/watch?v=nlUimyJpWtI>

Ainsi, le *Dernier Théorème de Fermat*, qui avait hanté les esprits pendant des siècles, trouva enfin sa réponse grâce à la ténacité et à l'ingéniosité d'Andrew Wiles. La preuve de Wiles a eu un impact profond sur les mathématiques. Elle a ouvert de nouvelles perspectives dans la théorie des nombres et a renforcé notre compréhension des courbes elliptiques et des formes modulaires. Le *Dernier Théorème de Fermat* est désormais un exemple emblématique de la puissance des mathématiques et de la persévérance des chercheurs (Stewart, 2014). Pour une histoire plus étendue du *Dernier Théorème de Fermat*, nous recommandons le livre incroyable de Simon Singh, intitulé *Fermat's Last Theorem* (Singh, 2002). Un joli résumé de l'histoire du Dernier Théorème de Fermat est aussi fait dans les 30 premières minutes du podcast *Dernier Théorème de Fermat : à l'épreuve de l'informatique* de la série *La Science, CQFD* de France Culture, mentionné à la fin de la section 03 Et l'intelligence artificielle dans tout ça ?

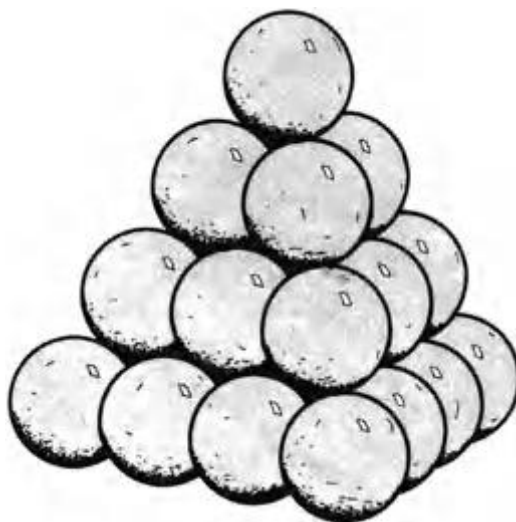
La conjecture de Kepler

Une autre conjecture connue qui a mis plusieurs centaines d'années à être résolue est la conjecture de Kepler. En 1611, l'astronome Johannes Kepler, qui avait commencé à étudier les arrangements de sphères, énonça sa conjecture :

Conjecture de Kepler. *Pour un empilement de sphères égales, en espace libre, la densité maximale est atteinte pour un empilement compact de plans compacts.*

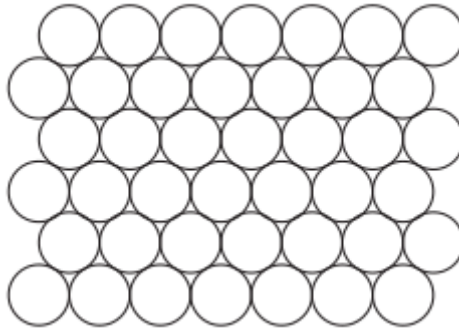
Pour expliquer ceci de manière plus simple, considérons un grand espace vide, tel qu'un hangar d'aviation, et demandons-nous quel est le plus grand nombre de boules que l'on peut y placer. Si, au lieu de boules, nous essayons d'empiler des cubes de bois identiques, comme les blocs de construction pour enfants, la réponse devient facile. Les cubes s'emboîtent les uns dans les autres sans espace perdu et nous pouvons remplir pratiquement cent pour cent de l'espace (en ignorant la petite quantité d'espace qui peut rester autour des murs et au plafond), et donc le nombre de cubes que nous pouvons empiler est presque égal au volume du hangar divisé par le volume de l'un des cubes.

Mais les sphères ne s'emboîtent pas aussi bien que les cubes, et il y a toujours de l'espace perdu entre les deux. Quelle que soit l'ingéniosité avec laquelle les boules sont disposées, environ un quart de l'espace ne sera pas utilisé. Une disposition familière est la suivante :



Source : Empilement compact de plans compacts (Conway & Sloane, 1999)

Et c'est en 1611 que Kepler prétendait que c'est aussi l'empilement le plus optimal qui existe. Il en était convaincu mais n'arriva pas à le prouver. C'est seulement en 1998 que Thomas Hales annonça avoir démontré la conjecture. Sa preuve était très longue et assistée par ordinateur. Elle était extraordinairement difficile à vérifier, mais est aujourd'hui complètement vérifiée et acceptée par la communauté mathématique. L'histoire ne s'arrêta pas là car la question d'un empilement optimal de sphère peut se poser dans n'importe quelle dimension (et pas seulement en dimension 3). Ce problème plus général est connu sous le nom de *Sphere Packing Problem*. La solution optimale en dimension 2 est la suivante :



L'empilement optimal en dimension 2 n'a seulement été démontré qu'en 1940. Pour les dimensions supérieures, le problème a été résolu récemment pour les dimensions 8 et 24 par la mathématicienne russe Maryna Viazovska (Klarreich, 2016).



Source : <https://www.faz.net/aktuell/wissen/falling-walls/die-mathematikerin-maryna-viazovska-gewinnerin-der-fields-medaille-im-gespraech-18452365.html>

Pour toutes les autres dimensions (dimensions strictement supérieures à 3 et différentes de 8 et 24), l'empilement optimal n'est pas encore connu.

La conjecture
de Kepler



<https://www.arte.tv/fr/videos/107398-007-A/voyages-au-pays-des-maths/>

La conjecture des nombres premiers jumeaux

Une troisième conjecture de laquelle on voulait parler est la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Définition. Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers. On dit que (p_1, p_2) forme un couple de nombres premiers jumeaux si $p_2 - p_1 = 2$.

Les premiers couples de nombres premiers jumeaux sont

$$(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), \dots$$

Nous savons depuis Euclide (300 av. J-Chr.) qu'il y a une infinité de nombres premiers. La question qui se pose alors, et que les mathématiciens se posent depuis le 19^e siècle, est s'il y a aussi une infinité de nombres premiers jumeaux. Comme la preuve de l'infinité des nombres premiers est relativement simple, les mathématiciens croyaient au début que la preuve de l'infinitude des nombres premiers jumeaux ne pourrait pas être très compliquée non plus. Mais personne n'arrivait à trouver une preuve. Certes, les ordinateurs trouvaient des nombres premiers jumeaux de plus en plus grands. Les plus grands connus à ce jour sont

$$2996863034895 \cdot 2^{1.290.000} - 1 \text{ et } 2996863034895 \cdot 2^{1.290.000} + 1.$$

Ils ont été découverts en 2016. Nous savons aussi qu'il y a 808.675.888.577.436 nombres premiers jumeaux avec moins de 18 chiffres. Tous ces faits font que les mathématiciens sont convaincus qu'il y a bel et bien un nombre infini de nombres premiers jumeaux. Or comme nous avons vu au paragraphe précédent, être convaincu ou trouver un grand nombre d'exemples qui fonctionnent ne constitue pas une preuve en mathématique. En mai 2013 tout a changé avec la publication d'un article du mathématicien Yitang Zhang. Dans l'article il a démontré le théorème suivant.

Théorème (Zhang, 2013). Il y a une infinité de nombres premiers (p_1, p_2) tels que

$$p_2 - p_1 \leq 70.000.000.$$

Ce théorème a fait sensation dans le monde mathématique. Pourquoi ? En fait, jusqu'en 2013 rien n'était connu au sujet des nombres premiers jumeaux. Les mathématiciens étaient convaincus de leur infinitude, mais ils n'avaient aucune preuve. Donc, il se pourrait que les nombres premiers s'écartent de plus en plus : qu'après un certain nombre énorme, on ne trouve plus de nombres premiers jumeaux, et puis après un nombre encore plus énorme, on ne trouve plus de nombres premiers d'écart 4, et puis d'écart 6 etc. C'était une réelle possibilité. En 2013, Zhang démontra que si nous nous donnons comme limite supérieure le nombre 70.000.000, alors on trouvera toujours des nombres premiers écartés d'au plus 70.000.000 aussi loin qu'on aille sur la ligne des nombres. Soyons d'accord, 70.000.000 n'est pas du tout égal à 2 mais les deux nombres ne sont pas si différents non plus, dans le sens que ce théorème de Zhang était un premier pas dans la bonne direction. Dans l'année qui suivit, plusieurs autres mathématiciens, dont Terrence Tao (voir section suivante), ont réussi à réduire le nombre de 70.000.000 à 246 ce qui donne comme théorème actuel :

Théorème (Maynard, Polymath, Tao, 2014). Il y a une infinité de nombres premiers (p_1, p_2) tels que

$$p_2 - p_1 \leq 246.$$

La limite 246 est déjà plus proche de 2 que la limite antérieure, mais malheureusement Tao et Maynard ont démontré aussi qu'avec les méthodes appliquées jusqu'à présent, il sera impossible de réduire plus cette limite. Il faudra donc trouver une nouvelle idée ou des nouvelles méthodes

mathématiques ce qui fait qu'une avancée a certes eu lieu dans la conjecture des nombres premiers jumeaux, mais la conjecture reste ouverte.

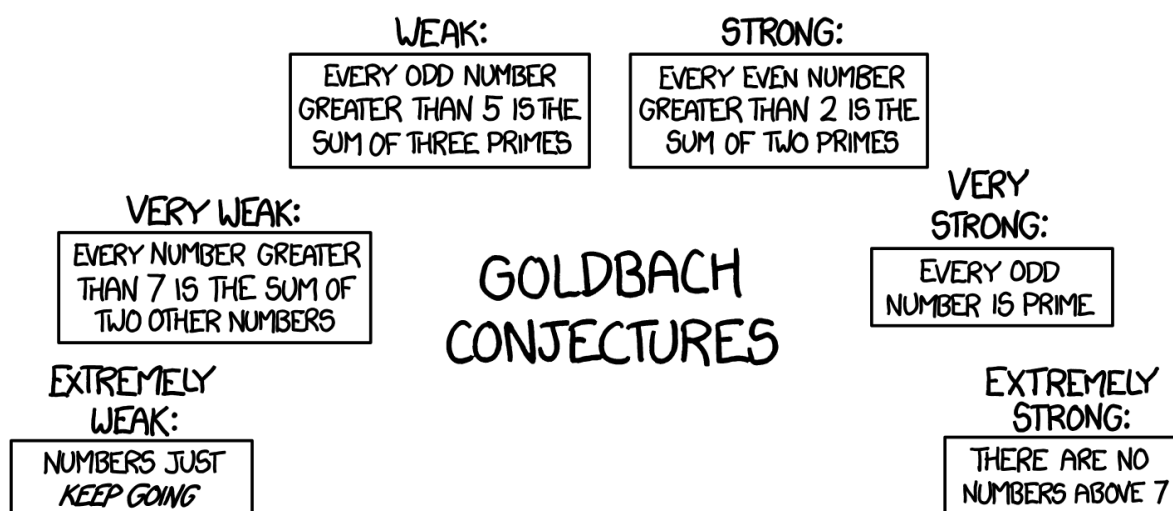
D'autres conjectures ouvertes connues sont celles illustrées dans les problèmes 13 et 14 de ce module.

La conjecture de Goldbach

Le problème 13 est connu sous le nom de la *conjecture de Goldbach*, formulée en 1742 par Christian Goldbach.

Conjecture de Goldbach. *Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers.*

C'est l'une des plus vieilles conjectures ouvertes en mathématiques. Elle est vérifiée pour tout nombre pair inférieur à $4 \cdot 10^{18}$, mais reste ouverte en général. Il existe une version faible de la conjecture de Goldbach, qui dit que tout nombre pair supérieur à 9 s'écrit comme somme de trois nombres premiers. Cette version s'appelle version faible, car si la conjecture de Goldbach sera démontrée un jour, la version faible en découle tout de suite : en effet, chaque nombre pair a supérieur à 9, s'écrit comme la somme d'un nombre pair b et de 3. Du coup si b s'écrit comme somme de deux nombres premiers (par la conjecture de Goldbach), a s'écrit comme somme de ces deux nombres premiers et 3, donc de 3 nombres premiers. En 2013, le mathématicien péruvien Harald Helfgott avait publié une preuve de la version faible. Cette preuve n'est toujours pas vérifiée.



Source : xkcd <https://xkcd.com/1310/>

Terrence Tao, que nous avons déjà rencontré plusieurs fois, a prouvé le théorème suivant.

Théorème (Tao, 2012). *Tout nombre entier impair supérieur à 1 peut s'écrire comme une somme de cinq nombres premiers.*

La conjecture de Goldbach fait partie du problème 8 des problèmes de Hilbert, ensemble avec la conjecture des nombres premiers jumeaux et l'hypothèse de Riemann. L'hypothèse de Riemann est probablement la conjecture la plus connue en mathématique. Cette hypothèse d'apparence anecdotique avancée par Bernhard Riemann il y a cent cinquante ans porte sur sujet de la répartition des nombres premiers. Un résumé passionnant et compréhensible en est donné dans le livre *The Music of the Primes* du mathématicien Marcus du Sautoy (du Sautoy, 2003). La vidéo suivante en présente une très brève synthèse.

L'hypothèse de Riemann



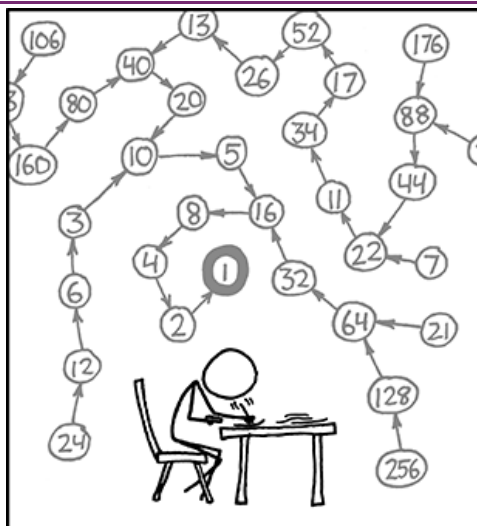
<https://www.arte.tv/fr/videos/097454-011-A/voyages-au-pays-des-maths/>

Lors du deuxième congrès international des mathématiciens, qui s'est tenu à Paris en août 1900, David Hilbert a présenté une liste de problèmes qui avaient jusqu'alors posé des défis aux mathématiciens. Selon Hilbert, ces problèmes devaient marquer l'évolution des mathématiques au XXe siècle, et il est indéniable qu'ils ont eu un impact considérable. Après la tenue du congrès, la liste définitive comprenait 23 problèmes, aujourd'hui connus sous le nom de problèmes de Hilbert. Aujourd'hui 8 de ces problèmes sont complètement résolus, 10 ont des solutions partielles et 5 sont encore sans solution. Une anecdote drôle est que Hilbert exprima des opinions quelque peu contradictoires concernant la difficulté de l'hypothèse de Riemann. À un moment donné, il a comparé trois problèmes non résolus : la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$, le *Dernier Théorème de Fermat* et l'*hypothèse de Riemann*. Selon lui, l'Hypothèse de Riemann serait probablement résolue dans quelques années, le dernier théorème de Fermat peut-être de son vivant, et la question de la transcendance peut-être jamais. Étonnamment, la question de la transcendance a été résolue quelques années plus tard. Comme vu auparavant, Andrew Wiles a récemment prouvé le Dernier Théorème de Fermat et l'hypothèse de Riemann reste ouverte. Une autre fois, Hilbert a fait remarquer que s'il se réveillait après un sommeil de cinq cents ans, sa première question serait de savoir si l'hypothèse de Riemann avait été résolue (Conray, 2003).

L'équivalent des problèmes de Hilbert au 21e siècle est la liste des sept problèmes du prix du millénaire sélectionnés en 2000 par l'Institut de mathématiques Clay : <https://www.claymath.org/millennium-problems/>. Contrairement aux problèmes de Hilbert, pour lesquels la principale récompense était l'admiration de David Hilbert lui-même et des mathématiciens en général, chaque problème du prix est assorti d'une prime d'un million de dollars. À ce jour, seulement un des sept problèmes a été résolu. C'est la conjecture de Poincaré qui a été résolue par le mathématicien excentrique russe Grigori Perelman.

La conjecture de Collatz

Le problème 14 de ce module, est connu dans le monde mathématique sous le nom de conjecture de Collatz ou conjecture de Syracuse. Cette conjecture ne fait pas partie des grands problèmes mathématiques mais est entrée dans le folklore mathématique car malgré la simplicité de son énoncé (on peut l'expliquer à un enfant de primaire), cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens.



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

Source : xkcd <https://xkcd.com/710/>

La vidéo suivante de Derek Muller de la chaîne de Youtube Veritasium en donne plus d'informations.



<https://www.youtube.com/watch?v=094y1Z2wpJg>

La conjecture d'Euler

Tout comme dans ce module, il y avait aussi dans l'histoire des mathématiques des conjectures dont les mathématiciens étaient convaincus qu'elles soient vraies et qui se sont révélées fausses pour finir. Un exemple connu en est la conjecture d'Euler qui a été originellement proposée par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1772 et qui s'énonce de la façon suivante :

Conjecture d'Euler. *Pour tout entier n strictement supérieur à 2, la somme de $n - 1$ puissances n -ièmes n'est pas une puissance n -ième.*

Remarquons que le cas $n = 3$ correspond au Dernier Théorème de Fermat avec exposant 3. C'est seulement en 1966 que deux mathématiciens trouvent un contre-exemple et écrivent un des articles les plus courts qui n'ont jamais été publiés en mathématique :

COUNTEREXAMPLE TO EULER'S CONJECTURE ON SUMS OF LIKE POWERS

BY L. J. LANDER AND T. R. PARKIN

Communicated by J. D. Swift, June 27, 1966

A direct search on the CDC 6600 yielded

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

as the smallest instance in which four fifth powers sum to a fifth power. This is a counterexample to a conjecture by Euler [1] that at least n n th powers are required to sum to an n th power, $n > 2$.

REFERENCE

1. L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. 2, Chelsea, New York, 1952, p. 648.

<https://www.ams.org/journals/bull/1966-72-06/S0002-9904-1966-11654-3/S0002-9904-1966-11654-3.pdf>

La conjecture de Pólya

Un dernier exemple de conjecture réfutée est la conjecture de Polya¹³. Nous allons commencer par une définition.

Définition. Un nombre entier positif est appelé de type pair si sa factorisation en nombres premiers contient un nombre pair de facteurs premiers. Sinon il est appelé de type impair.

Faisons un exemple. Comme $15 = 3 \cdot 5$, 15 possède 2 facteurs premiers et est donc de type pair. Par contre $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ et donc 12 est de type impair.

Par définition, 1 est de type pair et tous les nombres premiers sont de type impair.

Définition. On désigne par $E(n)$ le nombre d'entiers positifs inférieurs ou égaux à n qui sont de type pair et par $O(n)$ le nombre d'entiers positifs inférieurs ou égaux à n qui sont de type impair.

Essayons de déterminer $E(9)$ et $O(9)$. On prend tous les nombres entiers positifs de 1 à 9 inclus, puis on décide s'ils sont de type pair ou de type impair.

- Les nombres 1, 4, 6 et 9 sont de type pair. Il y en a 4 en tout. Donc $E(9) = 4$.
- Les nombres 2, 3, 5, 7 et 8 sont de type impair. Il y en a 5 en tout. Donc $O(9) = 5$.

Conjecture de Polya. Pour tout entier $n \geq 2$, $E(n)$ est inférieur ou égal à $O(n)$.

Existe-il une preuve pour la conjecture de Polya ?

La réponse c'est ... non !

En 1962, Sherman Lehman a trouvé que cette conjecture échoue pour $n = 906\,180\,359$. Le contre-exemple le plus petit est $n = 906\,150\,257$ et il a été découvert par Minoru TANAKA en 1980.

Donc, la conjecture de Polya est fausse .

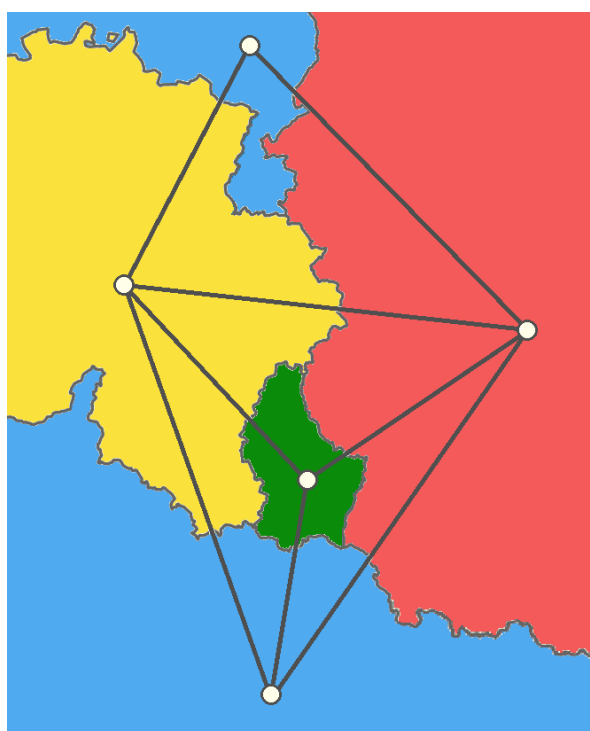
Et pour conclure, une citation de Polya concernant l'enseignement des mathématiques :

¹³ George PÓLYA, mathématicien d'origine hongroise, 1887-1987

A teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But if he challenges the curiosity of his students by setting them problems proportionate to their knowledge, and helps them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking.

03 | Et l'intelligence artificielle dans tout ça ?

Des preuves impliquant des calculs par ordinateur existent depuis un certain temps. La plus célèbre est la preuve du théorème des quatre couleurs. Le théorème des quatre couleurs indique qu'il est possible, en n'utilisant que quatre couleurs différentes, de colorier n'importe quelle carte découpée en régions connexes, de sorte que deux régions adjacentes, c'est-à-dire ayant toute une frontière (et non simplement un point) en commun reçoivent toujours deux couleurs distinctes.



Source : Wikipedia, Coloriage en quatre couleurs de cinq pays

Le résultat fut conjecturé en 1852 par Francis Guthrie, intéressé par la coloration de la carte des régions d'Angleterre. Deux premières démonstrations furent publiées, respectivement par Alfred Kempe en 1879 et Peter Guthrie Tait en 1880. Mais elles se révélèrent erronées ; les erreurs n'ont seulement été relevées qu'en 1890.

Si la preuve de Kempe s'est révélée fausse, elle fournit cependant une démonstration d'un problème analogue, avec cinq couleurs au lieu de quatre, aujourd'hui connu sous le nom du théorème des cinq couleurs.

En 1976, deux Américains, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, affirment avoir démontré le théorème des quatre couleurs. Leur démonstration partage la communauté scientifique : pour la première fois une démonstration exige l'usage d'un ordinateur. Les deux mathématiciens avaient réussi à réduire l'infinité des possibles cartes à 1482 cartes exactement. Pour vérifier que ces 1482 cas de cartes, pourraient toutes être coloriées avec 4 couleurs seulement, ils ont écrit un programme informatique qui a testé les 1482 cas un par un (plus de 1200 heures de calcul).

Depuis 1976, d'autres programmes informatiques, écrits de façon indépendante du premier, aboutissent au même résultat.

Jusqu'aujourd'hui aucune preuve qui puisse se passer de l'ordinateur n'a été découverte ; cependant, de nombreux amateurs continuent à être convaincus d'avoir démontré sans ordinateur le théorème des quatre couleurs. Dans le livre *Mathematical Cranks* (Underwood, 1992), tout un chapitre est dédié à ces tentatives parfois très drôles.

Comment savons-nous alors que la preuve du théorème des quatre couleurs est correcte ? Ces preuves par ordinateur sont-elles valables ? Pour la plupart des mathématiciens oui. La raison en est que, tant que nous vérifions le programme, le risque qu'un neutrino égaré transforme un 0 en 1 et produise un résultat erroné semble plus faible que le risque qu'il y ait une erreur dans l'une des centaines de pages de preuves faites à la main (comme celle du théorème de Fermat). Les êtres humains sont considérablement plus faillibles que les machines, si tant est que nous avons demandé à la machine de faire ce que nous voulions qu'elle fasse. Les preuves faites à la main ou chacun (qui dispose de connaissances mathématiques suffisantes) peut vérifier la preuve ligne par ligne restent bien-sûr préférables, mais ces preuves sont parfois difficiles à trouver. Dans ce cas une preuve par ordinateur est meilleure qu'aucune preuve (Hart, 2024).

Maintenant, avec les avancées récentes de l'intelligence artificielle, la question se pose si les ordinateurs seront bientôt capables de prouver des théorèmes tous seuls, sans aide d'un être humain. Selon la médaille Fields Terrence Tao on n'y est pas encore. Dans une interview avec *Quanta Magazine*, il déclare que les outils d'intelligence artificielle ne sont pas encore capables de faire des mathématiques de haut niveau de la recherche actuelle. Cependant, il est persuadé que cela viendra (Strogatz, 2024).

I think, the next cultural shift will be whether AI-generated proofs will be accepted. Right now, AI tools are not at the level where they can generate proofs to really advance mathematical problems. Maybe undergraduate-level homework assignments, they can kind of manage, but research mathematics, they're not at that level yet. But at some point, we're going to start seeing AI-assisted papers come out and there will be a debate. - Terrence Tao, 2024.

Il existe aujourd'hui des projets visant à formaliser les preuves des grands théorèmes dans ce que l'on appelle des *formal proof assistants*. Ce sont des langages informatiques capables de vérifier à 100 % qu'un théorème est vrai ou non et donc qu'il est prouvé ou non (Strogatz, 2024). Ces assistants permettront des collaborations entre beaucoup plus de mathématiciens. Pour le moment, une collaboration sur un projet ne contient jamais plus de 5 mathématiciens. Dans une collaboration il faut soit faire 100 % confiance aux autres mathématiciens, soit vérifier tous leurs calculs et parties de preuves ligne par ligne. À plus de 5 personnes, ceci devient trop chaotique. Mais, une fois, que ces *formal proof assistants* sont mis en place, des collaborations bien plus grandes sont tout à fait possibles, car ces outils vérifieront les différentes étapes (Drösser, 2024).

Un exemple d'un tel assistant est donné dans le podcast *Dernier Théorème de Fermat : à l'épreuve de l'informatique* de la série *La Science, CQFD* de France Culture. Le podcast parle d'un assistant de preuve qui est en train de vérifier la preuve du Dernier Théorème de Fermat mentionné auparavant. Les 30 premières minutes du podcast font un joli résumé de l'histoire du Dernier Théorème de Fermat :



<https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/la-science-cqfd/le-dernier-theoreme-de-fermat-8350706>

Références

1. Conrey, J.B. (2003). The Riemann Hypothesis. *Notices of the American Mathematical Society*. Volume 50. Number 3. <https://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf>
2. Conway, J. H. and Sloane N. J. A. (1999) *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Third edition. New York: Springer.
3. Drösser, C. (2024). AI Will Become Mathematicians' 'Co-Pilot'. *Scientific American*. June 2024. <https://www.scientificamerican.com/article/ai-will-become-mathematicians-co-pilot/>
4. Hart, S. (2024). *A Mathematician's View of Proof*. Gresham College Lecture Series. <https://www.gresham.ac.uk/watch-now/mathematician-proof>
5. Klarreich, E. (2016). Sphere Packing Solved in Higher Dimensions. *Quanta Magazine*. <https://www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/>
6. Du Sautoy, M. (2003). *The Music of the Primes*. Harper.
7. Singh, S. (2002). *Fermat's Last Theorem*. London: Fourth Estate.
8. Stewart, Ian. (2014). *The Great Mathematical Problems : Marvels and Mysteries of Mathematics*. London: Profile Books.
9. Strogatz, S. (2024). What makes for Good Mathematics? *The Joy of Why*. Quanta Magazine. <https://www.quantamagazine.org/what-makes-for-good-mathematics-20240201/>
10. Sullivan, B.W. (2013). *Everything You Always Wanted To Know About Mathematics (But didn't even know to ask)*. A Guided Journey Into the World of Abstract Mathematics and the Writing of Proofs. https://ia600408.us.archive.org/26/items/everything-you-always-wanted-to-know-about-mathematics/bws_book.pdf
11. Underwood, D. (1992). *Mathematical Cranks*. The Mathematical Association of America, Washington, 1992, v + 372.
12. Whitehead, A. N., and Russell, B. (1997). *Principia Mathematica*. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press.

1.6 La Parole aux scientifiques

01 Mäin Element – Hugo Parlier

Hugo Parlier, actuellement professeur au département de mathématiques de l'Université de Fribourg, est un mathématicien dont le parcours illustre parfaitement l'alliance entre recherche académique et vulgarisation scientifique.

Diplômé de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne où il a obtenu son doctorat en 2004, Hugo Parlier a enrichi son expérience à travers plusieurs séjours postdoctoraux à Madrid, Toronto et Genève. Sa carrière l'a ensuite mené à l'Université du Luxembourg (2017-2025), avant son retour récent à Fribourg. Ses recherches se concentrent sur des domaines variés incluant la géométrie, la topologie et la combinatoire.

La particularité d'Hugo Parlier réside dans son engagement constant pour rendre les mathématiques accessibles au grand public. Il est notamment le co-créateur de Mathema, un livre interactif pour iPad qui a donné naissance à des casse-têtes, appelés Quadratis, disponibles sur iOS.

Son implication dans la médiation scientifique s'est manifestée à travers plusieurs projets d'envergure : *The Simplicity of Complexity* et *Recreate: shapes from the collective Imagination*, qui ont été présentés à l'exposition universelle de Dubaï en 2021-2022 ; *The Sound of Data*, dans le cadre d'Esch2022, capitale européenne de la culture ; l'exposition *Shapes : Patterns in Art and Science* aux EPFL Pavillons, un projet collaboratif explorant les liens entre art et science.

Pour découvrir davantage sur son travail et sa vision des mathématiques, vous pouvez écouter son interview dans le podcast Mäin Element, une collaboration entre le Lëtzebuerger Journal et le Fonds National de la Recherche (FNR).



<https://journal.lu/fr/main-element-hugo-parlier>

02 Paroles de déchiffreurs

Qui sont les mathématiciens ? Comment travaillent-ils ? Qu'est-ce que l'intuition ? Par quelles contrées cheminent leurs idées ? Comment se déroule la journée d'un chercheur ? Ces questions, comme bien d'autres, ont été posées à quatorze chercheuses et chercheurs travaillant dans différents domaines des mathématiques lors d'interviews qui constituent le Web-documentaire « Paroles de déchiffreurs ». Un physicien, un astronome et une historienne des mathématiques ont également apporté leurs réponses.

Parsemés de doutes, joies, échecs, questions, désirs... les récits de ces chercheuses et chercheurs nous révèlent un monde méconnu du grand public. Toutes et tous manifestent une grande passion pour leur métier et montrent comment, sans de grandes capacités de travail et de concentration, elles et ils ne seraient pas arrivés là où elles et ils sont maintenant : à la frontière des dernières découvertes mathématiques. (imagesdesmaths, 2024)

Entre 2011 et 2012, une exposition de photographies intitulée *Les Déchiffreurs* a circulé dans la région Hauts-de-France. Cette exposition, créée par l'IHÉS en collaboration avec les photographes Anne Papillault et Jean-François Dars, s'est transformée en un projet plus ambitieux s'étendant jusqu'en 2018-2019.

Le projet a évolué pour inclure des interviews de mathématiciens et physiciens, donnant naissance à un web-documentaire. Réalisé par Michaël Mensier du Service audiovisuel de l'Université de Lille, ce projet vise à sensibiliser le grand public et les étudiants à la recherche fondamentale en mathématiques et en physique.

Bien que la pandémie ait interrompu la finalisation de quatre interviews, le projet représente un témoignage important de l'histoire des mathématiques contemporaines.

Le web-documentaire est accessible à l'adresse suivante :



<https://parolesdedechiffreurs.univ-lille.fr/>

Références

1. Valerio Vassallo. (2024). Web-documentaire « Paroles de déchiffreurs ». Images des Mathématiques. <https://images.math.cnrs.fr/billets/web-documentaire-paroles-de-dechiffreurs/>

