PROGRAMME FOR INNOVATIVE TEACHING AND TRAINING

PIT

2#Scannez les secrets des nombres

2.1 Indication Didactique

Ann Kiefer

Les mathématiques sont fréquemment perçues par les élèves comme une discipline abstraite, déconnectée de la réalité quotidienne. En conséquence, elles sont souvent considérées comme peu pertinentes pour la vie des élèves en dehors du cadre scolaire. Afin de remédier à cette perception, on s'efforce de démontrer les applications concrètes des mathématiques aux problèmes du monde réel. Cependant, ces applications sont souvent jugées ennuyeuses ou hors du contexte de la vie des adolescents (par exemple, adapter une recette pour quatre personnes à six, calculer des taux d'intérêt, déterminer la hauteur des bâtiments, etc.), ou bien elles sont trop complexes pour qu'un élève du secondaire puisse réellement comprendre les concepts mathématiques sous-jacents (comme les mathématiques du GPS ou celles utilisées dans l'intelligence artificielle, par exemple).

Dans ce module, nous proposons une application mathématique accessible aux élèves de 6e : les codes-barres. Les mathématiques des codes-barres reposent principalement sur les restes des divisions euclidiennes, un sujet inclus dans le programme de 6e. Ce module constitue donc une leçon idéale pour s'exercer aux divisions euclidiennes tout en découvrant une application concrète de ce domaine souvent perçu comme aride.

Bien que les codes-barres ne soient pas parmi les technologies les plus en vogue, ils sont omniprésents dans notre quotidien. Nous les rencontrons chaque jour. De plus, d'autres éléments tels que nos comptes et cartes bancaires, ainsi que nos cartes de sécurité sociale reposent sur le même principe que les codes-barres. Même les QR codes, bien que plus complexes, sont basés sur un principe similaire. Pour plus d'informations sur ce sujet, nous invitons les lecteurs intéressés à consulter la Section 2.5 : Pour aller plus loin.

Les mathématiques dans les technologies de l'information sont invisibles et donc pas réelles pour les adolescents, et les gens en général. Ceci vaut aussi pour les codes-barres. Ils sont là, on les scanne à la caisse, mais qui s'est déjà posé la question comment et pourquoi ils fonctionnent ? Coles, Barewell et al. (2013) font le lien entre cette invisibilité des mathématiques et l'omniprésence des technologies avec une éducation critique des mathématiques :

L'intégration des mathématiques dans les technologies de l'information a un certain nombre de conséquences importantes. L'une d'entre elles est que les mathématiques sont, dans un certain sens, invisibles. L'interaction avec les logiciels des systèmes informatiques ne permet généralement pas aux utilisateurs d'accéder aux algorithmes et aux modèles mathématiques sur lesquels le système est basé. Cette invisibilité permet bien sûr au système de fonctionner plus efficacement, mais elle masque également le rôle des mathématiques et, par conséquent, les décisions humaines qui sont prises quant aux variables et aux paramètres à inclure. Enfin, les technologies de l'information signifient qu'une « vision » mathématique de notre monde est profondément ancrée dans notre société. Seules les choses qui peuvent être mesurées et modélisées peuvent être incluses. Une éducation mathématique critique doit donc accorder une certaine attention au pouvoir de formatage des mathématiques et au rôle invisible des mathématiques dans nos vies.[1]

[1] 2013, Coles et. All. Texte original : The embedding of mathematics within information technology has a number of significant consequences. One is that mathematics is, in some sense, invisible. Interacting with

L'idée d'une éducation critique des mathématiques n'est pas nouvelle et a été développée par Skovsmose (1984, 1994, 2009). Selon lui, les mathématiques ne sont pas seulement un moyen puissant d'interroger le monde qui nous entoure, elles font partie de la structure de notre société (Coles et al., 2013).

Partir d'un problème réel et utiliser des mathématiques pour en trouver une solution est désigné par *modélisation mathématique*. Conrad Wolfram (2020) a développé un curriculum entier autour de la modélisation mathématique qui est actuellement implémenté dans des écoles en Estonie[2].

Il ne faut cependant pas oublier que, même dans une leçon sur des applications mathématiques, l'accent reste mis sur les concepts mathématiques. C'est ce que Coles (2016) décrit dans son *accomodation approach* comme suit :

En tant qu'enseignant, je me concentre sur les mathématiques que les élèves vont apprendre. J'utilise des exemples du monde réel chaque fois que je le peux, mais dans chaque leçon, je m'éloigne rapidement du contexte pour me concentrer sur les mathématiques sous-jacentes. Les mathématiques sous-jacentes ont été déterminées par moi à l'avance et ne peuvent être remises en question.[3]

C'est également le cas dans ce module. Bien que la construction et la compréhension du mécanisme du code-barres soient présentes tout au long du module, l'accent est mis sur les mathématiques et surtout sur la réflexion mathématique. Si le but ultime était d'expliquer le fonctionnement du code-barres EAN 13, une leçon de 45 minutes aurait suffi : on donne la formule mathématique derrière le code-barres et on laisse les élèves faire quelques exemples. Dans ce module, cependant, nous essayons de faire comprendre aux élèves les raisons mathématiques derrière les différents choix de fonctionnement d'un code-barres : pourquoi possède-t-il une clé de contrôle, pourquoi cette dernière est-elle calculée à partir d'une somme plutôt que d'un produit, pourquoi utilise-t-on une division euclidienne par 10, etc. ?

En conclusion, le code-barres, bien que légèrement ancien, est un parfait exemple de mathématiques cachées dans notre vie quotidienne et qui amène à des réflexions plus profondes sur les restes des divisions euclidiennes. C'est pourquoi le mathématicien suisse Urs Stammbach (2006) avait choisi ce sujet comme thème pour son exposé lors de la 17e Journée suisse des mathématiques et de l'enseignement (Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht) de l'ETH Zurich.

---

software of IT systems does not generally give users access to the mathematical algorithms and models on which the system is based. This invisibility, of course, makes the system work more efficiently, but it also masks the role of mathematics and with it the human decisions that are made about which variables and parameters to include. Finally, information technology means that a mathematical 'view' of our world is deeply embedded in our society. Only things that can be measured and modelled can be included. A critical mathematical education, then, will include some attention to the formatting power of mathematics and the invisible role of mathematics in our lives.

[2] Voir https://www.computerbasedmath.org/ pour plus d'information.

[3] Texte original: As a teacher my focus remains firmly on the mathematics that students will learn. I use real-world examples whenever I can but the focus in each lesson perhaps quickly shifts away from the context and into a consideration of the underlying mathematics. The underlying mathematics have been determined by me in advance and is not open to question.

Références

- Alf Coles, Richard Barwell, Tony Cotton, Jan Winter, Laurinda Brown. (2013). *Teaching mathematics as if the planet matters.* Routledge; 1st edition
- Skovsmose, Ole. (1984). Mathematical Education and Democracy. *Educational studies in mathematics* 21: 109–128.
- Skovsmose, Ole. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dodrecht: Kluwer.
- Skovsmose, Ole. (2009). *In Doubt: About Language, Mathematics, Knowledge and Life-worlds.* Rotterdam: Sense Publishers.
- Stammbach, Urs. (2006). EAN, ISBN, CD, DVD: Von Prüfziffern zu fehlerkorrigierenden Codes. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht. ETH Zurich.
- Wolfram, Conrad. (2020). *THE MATH FIX*. Kirkus Media LLC.

2.2 Planification de l'unité

01 Modalités de l'unité

- Public visé : 6C et 6G
- Local : pas de local spécial à prévoir
- Matériel nécessaire : des tablettes ou des téléphones mobiles sur lesquels un lecteur de codes-barres est installé.
  Exemple :

  Cognex Barcode Scanners App (AppStore ou Playstore)
- Les fiches de travail peuvent être consultées sur tablette ou en version imprimée.
- Durée : 4 heures d'enseignement

02 Compétences visées

Contenus

- Division euclidienne
- Équations

L'élève est capable de/d'

- résoudre des problèmes à l'aide d'une division euclidienne.
- utiliser une calculatrice ou un logiciel pour effectuer une division euclidienne et en interpréter le résultat.
- vérifier si une valeur donnée est une solution d'une équation.
- résoudre une équation du 1 er degré de la forme $ax + b = cx + d$.
- résoudre des problèmes à l'aide d'une équation du 1 er degré.

03 Déroulement de l'unité

Avant la leçon

L'enseignant installe un **lecteur de codes-barres** sur les tablettes de la classe ou demande aux élèves d'installer un lecteur de codes-barres sur leur téléphone. Un lecteur qui fonctionne bien est par exemple celui-ci :

Cognex Barcode Scanners App
AppStore ou Playstore

Il sera utile pour le début de la leçon.

Comme devoir à la maison, l'enseignant demande aux élèves de chercher des codes-barres sur des produits à la maison et de les télécharger sur une plateforme (M1).

La leçon

La leçon contient de nombreuses activités pour les élèves. Toutes les activités ne sont pas nécessaires pour la continuité de la leçon et certaines d'entre elles demandent plus d'efforts que d'autres. Laisser de côté ou ajouter ces activités est un bon moyen de différencier. Les activités facultatives sont désignées par des étoiles.

Il y a beaucoup de texte au début de chaque activité et entre les différents exercices. Nous avons choisi ce format pour permettre aux élèves de travailler de manière très autonome et d'avancer à leur rythme, sans devoir attendre les explications de l'enseignant. Bien sûr, l'enseignant reste libre de changer ce format et de donner des explications en début d'activité. Dans ce cas, les élèves peuvent ignorer le texte.

Ces explications écrites sont surtout utiles si l'enseignant fait travailler des élèves sur des activités optionnelles. Ainsi les élèves peuvent entamer leur travail sans avoir besoin d'explications supplémentaires.

Première heure d'enseignement

Entrée en matière I (10 min). En plénière les élèves débattent des codes-barres qu'ils ont découverts. Ils essaient de répondre à la question de l'utilité des codes-barres (M1).

Entrée en matière II (10 min). Afin de comprendre le principe des codes-barres, en groupe de deux ou trois, dépendant du nombre de lecteurs de codes-barres à disponibilité, les élèves scannent les articles, cherchent le code dans la base de données et calculent le prix (M2). Des explications supplémentaires ne sont pas nécessaires. L'enseignant passe dans les rangs et vérifient que les deux petites réflexions ont bien été faites.

Constat technique (10 min). Les élèves reçoivent plein de codes-barres abîmés (M3), mais chacun abîmé d'une manière différente. Dans les mêmes groupes qu'auparavant, ils doivent essayer de scanner les codes et voir si c'est possible ou non. Ils doivent aussi décrire la lésion pour chaque code. Cet exercice fonctionne mieux s'ils cachent tous les codes-barres et n'en laissent qu'un seul visible, sinon le lecteur risque de scanner le mauvais. L'enseignant les laisse réfléchir en groupe à la conclusion à en tirer. Puis celle-ci est discutée en plénière. La bonne conclusion à en tirer est qu'un code-barres avec un seul chiffre illisible reste lisible pas le lecteur. En revanche à partir de 2 chiffres illisibles, le lecteur n'arrive plus à déchiffrer le code. Les détails se trouvent dans la section Solutions.

Introduction du premier concept mathématique (15 min). Dans l'activité précédente, les élèves ont découvert que des codes-barres restent déchiffrables même si l'un des chiffres est illisible. Dans cette activité (M4), ils découvriront la raison derrière ce phénomène : la clé de contrôle. Avant d'entamer l'activité et de lire l'explication, l'enseignant débattra en plénière de ce phénomène qui peut paraître magique au premier abord : comment le lecteur de codes-barres est-il capable de lire un code si un chiffre est illisible ? Les élèves émettront des hypothèses de toutes sortes. L'enseignant n'écarte pas simplement les idées, mais explique pourquoi elles ne sont pas valides. Ensuite, l'enseignant essaie de mettre les élèves sur la bonne voie : l'un des 13 chiffres doit dépendre des autres (sinon il est impossible de le deviner). Mais de quelle manière ? L'objectif est que les élèves trouvent par eux-mêmes l'idée qu'un des 13 chiffres est obtenu à partir des autres via un calcul mathématique.

La question suivante est bien-sûr de savoir quel calcul mathématique nous donne le 13^{e} chiffre. Dans cette activité deux calculs sont proposés, pour montrer qu'un est meilleur que l'autre. L'activité consiste en deux exercices : le premier montre que les deux calculs sont faisables et fournissent une clé de contrôle. Le deuxième montre que dans les deux cas, une erreur dans le code-barres est détectée par la clé de contrôle. À la fin de l'activité M4, les élèves connaissent le concept d'une clé de contrôle, mais ignorent encore que certains calculs sont plus efficaces que d'autres pour établir des clés de contrôle. Ceci conclut la première heure d'enseignement.

Deuxième heure d'enseignement

Entrée en matière (1min). Le concept de clé de contrôle est brièvement rappelé de même que les deux méthodes de calcul d'une clé de contrôle (M5).

Approfondissement du premier concept mathématique I (9 min). Dans cette activité, un code abîmé est donné : $23x2$. Individuellement les élèves essaient de trouver la valeur de x pour que ce code fonctionne, c'est-à-dire pour que 2 soit bel et bien la clé de contrôle. Ils doivent le faire une fois selon la méthode d'Alice et une fois selon la méthode de Bob. La valeur de x n'est pas trouvée par résolution d'une équation mais par tâtonnement en essayant toutes les valeurs possibles de 0 à 9 (M5). Les résultats, c'est-à-dire voir qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour la valeur de x dans la cas du code d'Alice, mais plusieurs valeurs possibles dans le cas du code de Bob, sont débattus en plénière.

Approfondissement du premier concept mathématique II (10 min). En groupes (les mêmes groupes que dans la leçon précédente si possible), les élèves trouvent les chiffres manquants de M6.

Remarque : ceci n'a rien de compliqué, mais demande beaucoup de calcul mental, chose qui, d'après notre expérience, prend toujours plus de temps que prévu.

La conclusion (fin de l'activité M6) est d'abord débattue en groupe, puis en plénière.

****Rappel I.* Cette activité (M7) est facultative. Si l'enseignant juge que les élèves ont besoin d'un rappel sur la division euclidienne, nous lui conseillons de le faire.

Rappel II (10 min). Contrairement au rappel précédent, qui était théorique, ce rappel (M8) oblige les élèves à mettre les mains à la pâte et à calculer des restes de divisions euclidiennes. Pour gagner du temps, et si les élèves connaissent bien le concept de la division euclidienne, l'enseignant peut envisager de supprimer également ce rappel. Nous conseillons également à tout le monde de faire travailler les élèves en groupe et qu'un élève s'occupe du cas $d = 2$, un autre du cas $d = 3$ et un autre du cas $d = 5$. Nous conseillons également à tout le monde de faire le cas $d = 10$. Cela servira plus tard. L'enseignant s'assure que tous les élèves ont compris l'astuce pour calculer le reste de la division euclidienne par 10. La deuxième activité de ce rappel (M9) aborde une propriété qui est important pour la suite. Nous conseillons donc de ne pas la laisser tomber.

****Pour aller plus loin.*** L'activité M10 sort du contexte et va plus loin. Elle peut être laissée de côté sans aucun souci. L'idée est d'aborder la congruence modulaire qui est, par définition, basée sur les restes des divisions euclidiennes par un nombre. Nous conseillons de la laisser aux élèves les plus forts. Ils peuvent la faire en classe s'ils avancent plus vite que les autres, ou comme devoir à la maison. La congruence modulaire est un concept des mathématiques plus abstraites qui peut éveiller l'intérêt des élèves forts pour les mathématiques abstraites.

Approfondissement (13 min). Dans cette activité (M11) la propriété suivante est abordée :

La somme des restes de divisions euclidiennes de a par d et de b par d équivaut au reste de la division euclidienne de $a + b$ par d .

Même si cette propriété est connue de certains élèves, nous conseillons de faire cette activité, car elle sera importante pour le raisonnement qui suivra. Cette activité se fait en partie sur la plateforme Mathigon (suivez le lien indiqué dans M11) et en partie sur papier. Nous conseillons de laisser les élèves travailler en groupe. Pour gagner du temps, une partie des élèves peuvent suivre l'approche d'Alice et une autre partie l'approche de Bob. Après ils mettent leurs résultats ensemble et comparent.

Clôture (2 min). En plénière la propriété précédente est discutée pour s'assurer que tous les élèves ont compris.

Troisième heure d'enseignement

****** Excursion dans la combinatoire.*** Cette partie (M12) est à nouveau facultative. Elle n'est pas directement liée au module, donc la laisser de côté n'a pas d'impact sur la suite. Cependant, lorsqu'on aborde la création de codes-barres, une question naturelle qui se pose est le nombre de possibilités de codes-barres. C'est la raison pour laquelle nous avons inclus cette activité, qui constitue une première introduction à la combinatoire pour les élèves les plus motivés.

Introduction du deuxième concept mathématique (20 min). Le but de cette activité (M13) est de comprendre quel diviseur il faut choisir pour construire une clé efficace basée sur le reste d'une division euclidienne. D'abord les hypothèses de bases sont expliquées clairement en plénière (5 min) :

- Code à 3 chiffres.
- Les deux premiers chiffres sont à choisir parmi les chiffres de 0 à 6.
- Définition de la clé de contrôle.

Remarque : Au tout début, il y a une petite partie de combinatoire. Celle-ci peut être traitée par une partie des élèves (par exemple, ceux qui ont fait l'activité facultative précédente), être laissée de côté sans avoir de conséquence sur le reste du module ou être traitée par tous les élèves.

L'enseignant divise la classe en 9 groupes, chacun travaillant sur un des 9 exemples de M13 pendant 10 minutes. Il s'assure que chaque groupe complète correctement la conclusion de son exemple. Ensuite, il recompose les groupes en plaçant un élève de chaque exemple dans chaque nouveau groupe. Dans ces nouveaux groupes, les élèves partagent leurs conclusions et remplissent ensemble le tableau récapitulatif final de M13 (5 min).

Conclusion (20 min). Les élèves se regroupent par deux ou trois pour cette activité. Ils prennent le temps de lire attentivement le texte et de compléter les espaces vides (M14). Nous recommandons de prévoir suffisamment de temps pour cette tâche, car le texte peut être complexe à comprendre pour les élèves.

Mise en commun (5 min). En plénière les constats faits lors de la conclusion sont débattus. L'enseignant s'assure que tous les élèves ont compris pourquoi c'est important de choisir un diviseur $d \geq 7$.

Quatrième heure d'enseignement

Rappel et mise en commun (10 min). Dans cette première partie (M15), les élèves sont amenés à réfléchir sur l'ensemble des connaissances acquises jusqu'à présent dans le module. Ils sont ensuite invités à envisager comment concevoir de manière efficace un code-barres à 12 chiffres, avec un chiffre de contrôle en supplément. Cela sert de transition vers la seconde partie de la leçon, où le code-barres officiel EAN 13 est présenté.

Exemple réel (30 min). D'abord le code-barres EAN 13 est présenté (M16) et les consignes de calcul de la clé de contrôle sont expliquées. L'enseignant parcourt ceci en plénière avec les élèves (5 min). Puis les élèves refont le calcul de la clé de contrôle sur deux exemples (le code-barres d'un yaourt LUXLAIT et un code-barres qu'ils trouvent) (10 min). Cette activité et celles qui suivent peuvent être exécutées en groupe. Cette activité sert à renforcer la compréhension du calcul et à s'assurer de la compréhension des élèves. Une fois l'algorithme de calcul compris, on passe à la détection des erreurs (M17). Trois codes-barres sont présentés aux élèves qui doivent déterminer si les codes-barres sont corrects ou non (7 min). Si l'enseignant se rend compte que le calcul mental ralentit les élèves, il peut leur proposer d'effectuer cet exercice en groupes de 3 où chaque élève traite un exemple. Pour finir deux codes-barres avec à chaque fois un chiffre manquant sont présentés aux élèves (M18) qui doivent retrouver le chiffre manquant. (8 min).

Remarque 1 : Si les équations ont déjà été abordées en classe, il est conseillé de demander aux élèves de déterminer le chiffre manquant en utilisant une équation correctement formulée. Sinon vous pouvez autoriser les élèves à trouver la réponse par essais successifs ou tâtonnement. Cette méthode peut être également plus appropriée pour une classe rencontrant des difficultés en mathématiques.

Remarque 2 : Pour rendre cet exercice plus ludique, l'enseignant peut acheter des produits appréciés par les élèves (boissons gazeuses, bonbons, etc.) et masquer un des chiffres du code-barres (en le noircissant par exemple). Il est recommandé de photographier le code-barres avant de masquer un chiffre. Il est également conseillé de répéter l'exercice deux fois avec deux produits différents, en masquant une fois un chiffre de rang impair et une autre fois un chiffre de rang pair (l'équation de résolution varie légèrement selon le rang du chiffre masqué). Ce jeu peut se dérouler de manière compétitive (le premier groupe à trouver le chiffre manquant reçoit le produit comme cadeau) ou de manière non-compétitive (l'enseignant achète suffisamment de produits pour tous les élèves, et chaque groupe obtient sa récompense une fois la bonne réponse trouvée). Le choix final dépend de l'ambiance de la classe et de l'attitude des élèves.

******Pour aller plus loin.*** Jusqu'à ce point, le module a clairement expliqué et montré, à l'aide d'exemples concrets, les idées derrière le code-barres EAN 13 (pourquoi les chiffres de 0 à 9, pourquoi une clé de contrôle, pourquoi la somme dans l'algorithme qui détermine la clé de contrôle, pourquoi la division euclidienne par 10). Ce qui reste à éclaircir est la somme pondérée : pourquoi multiplie-t-on les chiffres de rang pair par 3 ? Cette question est abordée et résolue dans l'activité M19. Même si cette partie est laissée de côté, nous conseillons à l'enseignant de la lire au cas où un élève poserait cette question.

Clôture (5 min). Pour clôturer le module, l'enseignant anime une discussion en plénière avec toute la classe durant laquelle il répète l'algorithme du code-barres EAN 13 et explique les différentes parties de cet algorithme en lien avec ce qui a été vu au cours de la session.

04 Possibilités de différenciation

Le module est conçu de façon à permettre aux élèves de travailler de manière autonome. Au début de chaque section, des explications sont fournies pour que les élèves puissent entamer la section sans l'aide de l'enseignant. Ainsi l'enseignant peut travailler avec les élèves plus faibles et laisser les élèves plus forts et motivés avancer à leur rythme.

Pour une classe rencontrant des difficultés en mathématiques, l'enseignant a aussi la possibilité de laisser de côté une partie ou toute la partie axée sur le raisonnement mathématique (M4-M16) et de se concentrer sur le calcul de la clé de contrôle dans le cas des codes-barres EAN 13.

05 Autres critères à remplir dans le cadre de la série des unités

- **Contexte luxembourgeois :** Les codes-barres sont universels et pas directement liés au Luxembourg. Cependant la thématique s'apprête à faire le lien avec la recherche faite au Luxembourg. Une partie du Département de Mathématiques du Luxembourg fait de la recherche en théorie des nombres, un domaine étroitement lié à la théorie des codes et la cryptographie. De la recherche en cryptographie et sécurité est également faite au Département d'Informatique de l'université du Luxembourg et au SnT (Interdisciplinary Centre for Security, Reliability and Trust).
- **Différenciation :** Comme décrit dans le paragraphe précédent, le module contient plusieurs niveaux de différenciation.
- **Guide de référence pour l'éducation aux et par les médias :** Compétences visées du Guide de référence pour l'éducation aux et par les médias[4] :
- Compétence 2 – Communication et collaboration : 2.1 Interagir avec autrui
- Compétence 5 – Environnement numérique : 5.1 Résoudre des problèmes techniques simples
- **Modèle des 4C :** communication, collaboration, créativité, pensée critique : Les 4C sont intégrés dans ce module. Au cours des quatre heures d'enseignement, il est demandé aux élèves de communiquer et de collaborer pour résoudre les problèmes. À chaque regroupement, la pensée critique des élèves est stimulée afin de traduire les concepts mathématiques abordés précédemment en règles pour la création d'un code-barres. La créativité des élèves est sollicitée dès le début du module lorsqu'ils doivent réfléchir à la manière dont un lecteur de code-barres peut déchiffrer un code-barres endommagé.

[4] https://edumedia.lu/wp-content/uploads/2024/12/Medienkompass_FR_web.pdf

06 Planification détaillée de la leçon

Durée	Phases	Focus	Formes sociales / Méthodes	Matériels / Supports	Processus d'apprentissage
Première heure d'enseignement					
10'	Entrée en matière I	Utilité des codes-barres	Discussion animée, travail en grand groupe	M1	Les élèves… ... savent reconnaître des codes-barres. ... connaissent l'utilité des codes-barres.
10'	Entrée en matière II	Exploration des codes-barres	Travail en petits groupes	M2 Une tablette ou un smartphone	Les élèves… ... savent scanner des codes-barres. ... savent retrouver des codes dans une base de données.
10'	Constat technique	Scanner des codes-barres	Travail en petits groupes	M3 Une tablette ou un smartphone	Les élèves... ... savent scanner des codes-barres. ... constatent que les codes-barres sont lisibles même si un des chiffres est illisible.
15'	Concept mathématique I	Clé de contrôle	Débat en plénière Travail individuel	M4	Les élèves... ... connaissent le concept de clé de contrôle. ... savent suivre un algorithme afin de déterminer une clé de contrôle.
Deuxième heure d'enseignement					
10'	Entrée en matière Aprofondisse-ment I	Rappel Calcul	Plénière Travail individuel	M5	Les élèves... ... connaissent le concept de clé de contrôle. ... savent retrouver une valeur inconnue d'un code-barres à l'aide du tâtonnement.
10'	Approfondisse-ment II	Résolution d'équation	Travail en petits groupes	M6	Les élèves... ... savent retrouver une valeur inconnue d'un code-barres en résolvant une équation simple.

			Débat en plénière		
	Rappel I	Division euclidienne	Plénière	M7	Les élèves… … savent faire une division euclidienne.
10’	Rappel II	Division euclidienne	Travail en petits groupes	M8 M9	Les élèves… … savent calculer des restes de divisions euclidiennes. … savent qu’un même reste peut apparaître pour plusieurs divisions euclidienne différentes.
	Investigation	Congruence modulaire	Travail individuel ou en petits groupes	M10	Les élèves … connaissent l’écriture du calcul modulaire. … savent manipuler le calcul modulaire.
13’	Approfondisse-ment II Clôture	Somme de restes	Travail en petits groupes Débat en plénière	M11	Les élèves… … constatent que le reste d’une division euclidienne d’une somme par un nombre vaut la somme des restes des divisions euclidiennes par le même nombre. … savent et ont compris que le reste d’une division euclidienne d’une somme par un nombre vaut la somme des restes des divisions euclidiennes par le même nombre.
Troisième heure d’enseignement					
	Excursion	Combinatoire	Travail individuel ou en petis groupes	M12	Les élèves… … savent calculer le nombre de possibilités d’une situation donnée.
20’	Concept mathématique II	Choix du diviseur	Travail en petits groupes	M13	Les élèves… … savent suivre des algorithmes. … savent résoudre des équations.

					… constatent que les équations n'ont pas toujours une solution unique.
20'	Conclusion	Choix du diviseur	Travail en petits groupes	M14	Les élèves… … savent que le choix du diviseur est important pour avoir des solutions uniques aux équations.
5'	Mise en commun	Choix du diviseur	Plénière	M14	Les élèves… … savent que le choix du diviseur est important pour avoir des solutions uniques aux équations.
Quatrième heure d'enseignement					
10'	Rappel	Définition d'un code-barres et d'une clé de contrôle	Plénière	M15	Les élèves… … répètent la définition d'une clé de contrôle. … répètent qu'une clé de contrôle basée sur une somme fonctionne mieux qu'une basée sur un produit. … répètent l'importance du diviseur.
30'	Découverte	Code-barres EAN 13	Travail en petits groupes	M16 M17 M18	Les élèves… … connaissent l'algorithme derrière le code-barres EAN 13. … savent détecter une erreur dans un code-barres. … savent retrouver un chiffre manquant en résolvant une équation.
	Exploration	Sommes pondérées	Travail en petits groupes ou individuel	M19	Les élèves… … comprennent l'intérêt des sommes pondérées dans l'algorithme d'un calcul de clé de contrôle.
5'	Clôture	Code-barres EAN 13	Plénière	Tableau	Les élèves… … connaissent l'algorithme de calcul de la clé de contrôle dans les codes-barres EAN 13.

					... comprennent les différentes motivations mathématiques derrière les éléments de cet algorithme.

2.3 Matériels Pédagogiques

M1 Les codes-barres sont partout ! Mais où exactement ?

Regarde autour de toi. Peux-tu apercevoir des code-barres ? Si oui, photographie-les et télécharge-les sur la plateforme suivante :

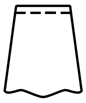
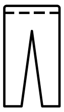
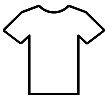
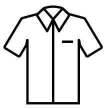
https://flinga.fi/s/FV6B92C

Connais-tu d'autres endroits où on peut trouver des code-barres ? Quel rôle jouent-ils ? Pourquoi sont-ils utilisés ?

M2 La base de données

Les code-barres se réfèrent souvent à une **base de données** qui permet d'associer les différents codes à d'autres informations concernant l'objet scanné.

Dans un magasin de vêtements, tous les produits sont marqués par un code-barres unique qui est relié avec le prix du produit. Le lecteur lit le code et identifie ainsi le produit. La **base de données** du système permet d'attribuer un prix à chaque produit.

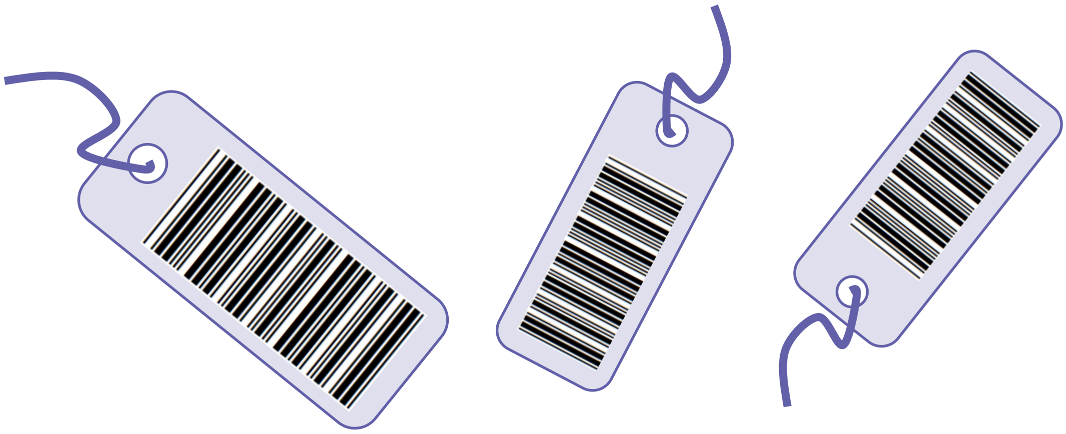
Code	Produit	Prix
10011		50 €
11100		30 €
01100		45 €
00011		60 €
00100		15 €
01101		100 €
11001		30 €
01010		10 €
11101		100 €
00010		80 €
10101		50 €

À la caisse

- Beyoncé achète les articles suivants. Combien doit-elle payer ?

Beyoncé doit payer ____ .

- Justin dépose les articles suivants à la caisse du magasin. Combien doit-il payer ?



Justin doit payer ____ .

Quelques réflexions

- La disposition ou l'orientation des code-barres ont-elles un effet sur la qualité du scan ?

____

- Le codage des produits se fait à l'aide d'un code de _____ chiffres composé des chiffres _____ et _____.

M3 Tester les limites du lecteur de codes-barres

Lors du transport des marchandises ou à la suite d'accidents, il peut arriver que l'étiquette qui porte le code-barres soit abîmée ou modifiée.

Essaie de scanner les différents codes-barres abîmés. Ton lecteur est-il capable de reconnaître tous les codes ?

Indique par ✓ si le code est lisible et par ✗ s'il ne l'est pas.

Étiquette abîmée	Description de la lésion	Lisible ?
1 234567 891231		
9 876543 219879		
3 551780 840111		

Étiquette abîmée	Description de la lésion	Lisible ?
4 00 817 512029		
7 622201 7918 4		
5 41 038 1 1279		
9 82359 3 37 3		

Que peux-tu conclure ?

M4 La clé de contrôle

Dans l’activité précédente, tu as remarqué que le lecteur peut même identifier des codes abîmés, sous condition que les dégâts ne soient pas trop importants. En effet, le lecteur peut lire le code abîmé quand il y a **au plus un seul chiffre** qui n’est pas lisible sur l’étiquette. Ceci est faisable grâce à une **clé de contrôle** contenu dans le code qui permet de récupérer un chiffre manquant, le cas échéant. L’idée de la clé de contrôle consiste à ajouter au code un chiffre supplémentaire (normalement à la fin du code) qui est **calculé à partir des autres chiffres du code** en utilisant une certaine formule ou algorithme mathématique.

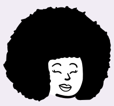
La clé de contrôle permet également de **contrôler** si le code a été **bien saisi** dans le système informatique ou s’il s’agit d’un **code fautif**.

Comment calculer la clé de contrôle ?

Prenons un code composé de 4 chiffres choisis parmi les éléments de l’ensemble

$$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}; \mathbf{7}; \mathbf{8}; \mathbf{9}\}$$

Alice et **Bob** proposent deux méthodes différentes pour calculer la clé de contrôle :

Alice	Bob
 Je calcule la **somme** des 3 premiers chiffres du code. La clé de contrôle sera le **dernier chiffre** du résultat obtenu.	 Je calcule le **produit** des 3 premiers chiffres du code. La clé de contrôle sera le **dernier chiffre** du résultat obtenu.

Exercice : Examine quelques exemples :

Code	Alice			Bob		
	Somme des chiffres	Clé de contrôle	Code complet	Produit des chiffres	Clé de contrôle	Code complet
115	7	7	1157	5	5	1155
602						
542						
922						
859						

Est-ce que les deux méthodes fonctionnent pour générer des codes-barres ?

Exercice : Les codes sont-ils corrects ?

Marque par ✅ les codes corrects et par ❌ les codes incorrects :

Codes d'**Alice**

Code complet	Code sans clé de contrôle	Clé de contrôle calculée selon la méthode	Correct ou incorrect ?
1236			
0461			
4734			
9876			

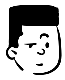
Codes de **Bob**

Code complet	Code sans clé de contrôle	Clé de contrôle calculée selon la méthode	Correct ou incorrect ?
1236			
0461			
4734			
9876			

Est-ce que la clé de contrôle permet de vérifier si le code a été bien saisi ? Dans les deux méthodes ?

M5 Un code abîmé

Alice et Bob rencontrent un problème : Par malchance, un de leurs codes est rendu illisible ! Peux-tu les aider à retrouver le code initial ?

Code abîmé d'**Alice**	Code abîmé de **Bob**
 $23x2$	 $23x2$

Souviens-toi :

- Alice calcule la **somme des 3 premiers chiffres** du code et la clé de contrôle (donc le 4e chiffre) est le **dernier chiffre** du résultat.
- Bob calcule le **produit des 3 premiers chiffres** du code et la clé de contrôle (donc le 4e chiffre) est le **dernier chiffre** du résultat.

Code abîmé d'Alice

La **somme des chiffres** est :

$S =$ ______________________________

Le **dernier chiffre** de S est 2.

x prend ses valeurs dans l'ensemble

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

x	S
1	6
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	

Le **dernier chiffre** de S est 2 pour

$S =$ ________________

Ainsi :

$x =$ ________________

Il y a __________ possibilité pour la valeur de x.

Code initial : ________________________

Code abîmé de Bob

Le **produit des chiffres** est :

$P =$ ______________________________

Le **dernier chiffre** de P est le chiffre 2.

x prend ses valeurs dans l'ensemble

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

x	P
1	6
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	

Le **dernier chiffre** de P est 2 pour

$P =$ ________________

Ainsi :

$x =$ ________________

Il y a __________ possibilités pour la valeur de x.

Code initial : _________________________

M6 Calculer un chiffre manquant

Imaginons maintenant que, dans chaque code, il y a **un seul** chiffre qui est illisible pour le lecteur. On note le chiffre illisible par x. Est-ce que la clé de contrôle permettra de retrouver le chiffre manquant dans tous les cas ?

Les codes abîmés d'Alice

Alice calcule la **somme des 3 premiers chiffres** du code et la clé de contrôle sera le **dernier chiffre** du résultat.

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des 3 premiers chiffres	Résultat de la somme	Valeur de x	Code initial
$58x2$	2	$5+8+x=13+x$	22	9	5892
$x148$					
$1x51$					
$79x3$					

Est-ce que dans chacun des cas on retrouve la valeur de x ?

Les codes abîmés de Bob

Bob calcule le **produit des chiffres** du code et la clé de contrôle sera le **dernier chiffre** du résultat.

Code abîmé	Clé de contrôle	Produit des 3 premiers chiffres	Résultat du produit	Valeur de x	Code initial
$x178$	8	$x\cdot 1\cdot 7 = x\cdot 7$	28	4	4178
$1x31$					
$23x6$					
$15x3$					

Est-ce que dans chacun des cas on retrouve la valeur de x ?

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

- ☐ Le système d'**Alice** est mieux que celui de **Bob**, car il permet de retrouver un unique code à partir de la clé de contrôle.
- ☐ Le système de **Bob** est mieux que celui d'**Alice**, car il permet de retrouver plusieurs codes à partir de la clé de contrôle.
- ☐ Les systèmes d'**Alice** et de **Bob** sont équivalents, car ils permettent tous les deux de retrouver au moins un code initial à partir de la clé de contrôle.

M7 Rappel : La division euclidienne

D’un point de vue mathématique, que signifie-t-il de « prendre le dernier chiffre d’un nombre » comme clé de contrôle ? Pour expliquer ce concept en détail, tu auras besoin de la **division euclidienne**.

Définition

La **division euclidienne** est une opération qui à deux nombres naturels appelés **dividende** D et **diviseur** d associe deux autres nombres naturels appelés **quotient** q et **reste** r tel que :

$$D = d \cdot q + r \text{ où } 0 \leq r < d$$

Exemples :

Division euclidienne de 57 par 2 :

$$\begin{array}{cccccc}
5 & 7 & : & 2 & = & 2\;8 \\
4 & & & & & \\
\hline
1 & 7 & & & & \\
1 & 6 & & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}$$

$57 = 2 \cdot 28 + 1$, donc le reste de la division euclidienne de 57 par 2 est égal à 1.

Division euclidienne de 57 par 3 :

$$\begin{array}{cccccc}
5 & 7 & : & 3 & = & 1\;9 \\
3 & & & & & \\
\hline
2 & 7 & & & & \\
2 & 7 & & & & \\
\hline
 & 0 & & & &
\end{array}$$

$57 = 3 \cdot 19 + 0$, donc le reste de la division euclidienne de 57 par 3 est égal à 0.

Division euclidienne de 57 par 5 :

$$\begin{array}{cccccc}
5 & 7 & : & 5 & = & 1\;1 \\
5 & & & & & \\
\hline
0 & 7 & & & & \\
 & 5 & & & & \\
\hline
 & 2 & & & &
\end{array}$$

$57 = 5 \cdot 11 + 2$, donc le reste de la division euclidienne de 57 par 5 est égal à 2.

Division euclidienne de 57 par 10 :

$$\begin{array}{cccccc}
5 & 7 & : & 1\;0 & = & 5 \\
5 & 0 & & & & \\
\hline
 & 7 & & & &
\end{array}$$

$57 = 10 \cdot 5 + 7$, donc le reste de la division euclidienne de 57 par 10 est égal à 7.

M8 Calcul mental

Exemples :

- $16 = 2 \cdot 8 + 0$, donc le reste de la division euclidienne de 16 par 2 est égal à 0.
- $17 = 2 \cdot 8 + 1$, donc le reste de la division euclidienne de 17 par 2 est égal à 1.

Entraine-toi à effectuer **mentalement** des divisions euclidiennes !

***Division euclidienne par** $d = 2$*

Division euclidienne par $d = 2$:

D	q	r
16	8	0
17	8	1
30		
75		
106		

D	q	r
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Le reste peut prendre les valeurs suivantes : ____ .

Division euclidienne par $d = 3$

Division euclidienne par $d = 3$:

D	q	r
16	5	1
17		
30		
75		
106		

D	q	r
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Le reste peut prendre les valeurs suivantes : ____ .

Division euclidienne par $d = 5$

Division euclidienne par $d = 5$:

D	q	r
16	3	1
17		
30		
75		
106		

D	q	r
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Le reste peut prendre les valeurs suivantes : ____ .

Division euclidienne par $d = 10$

Division euclidienne par $d = 10$:

D	q	r
16	1	6
17		
30		
75		
106		

D	q	r
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Le reste peut prendre les valeurs suivantes : ____ .

Il y a une astuce pour calculer le reste de la division euclidienne par 10. Sais-tu laquelle ?

Utilise cette astuce pour calculer rapidement le reste de la division euclidienne par 10 des nombres suivants :

D	r
93	
170	
245	
568	
1021	

M9 Le même reste pour des nombres différents

Dans l'activité précédente, nous avons trouvé que si on effectue la division euclidienne par un nombre naturel d alors le reste peut prendre les valeurs suivantes :

En tout, le reste peut prendre _______ valeurs différentes.

Par conséquent, beaucoup de nombres auront **le même reste** si on leur applique la division euclidienne par d.

Exemple :

Les nombres 5 et 9 ont le même reste par la division euclidienne par 2.

1) $5 = 2 \cdot 2 + 1$
2) $9 = 2 \cdot 4 + 1$

Considérons d'autres exemples :

Division euclidienne par $d = 5$

Dans la première ligne du tableau ci-dessous, écris des nombres qui ont tous un reste égal à 0 lors d'une division euclidienne par 5. Procède de la même façon pour des restes égaux à 1, 2, 3 et 4.

Division euclidienne par $d = 5$	Nombres						
$r = 0$	0	5	10				
$r = 1$	1						
$r = 2$	2						
$r = 3$	3						
$r = 4$	4						

Division euclidienne par $d = 3$

Répète l'exercice dans le cas de la division euclidienne par 3.

Division euclidienne par $d = 3$	Nombres						
$r =$	0						
$r =$							
$r =$							

M10 Nombres congrus modulo d

Définition

Si deux nombres a et b ont **le même reste par la division euclidienne par d**, alors on dit que les nombres a et b sont **congrus modulo d**. On note :

$$a \equiv b \pmod{d}$$

Exemples :

1)	$16 \equiv 21 \pmod{5}$,	car	$16 = 5 \cdot 3 + 1$	et	$21 = 5 \cdot 4 + 1$
	On écrit :	$16 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{5}$			
2)	$16 \equiv 20 \pmod{2}$,	car	$16 = 2 \cdot 8 + 0$	et	$20 = 2 \cdot 10 + 0$
	On écrit :	$16 \equiv 20 \equiv 0 \pmod{2}$			
3)	$16 \equiv 40 \pmod{12}$,	car	$16 = 12 \cdot 1 + 4$	et	$40 = 12 \cdot 3 + 4$
	On écrit :	$16 \equiv 40 \equiv 4 \pmod{12}$			

Exercice 1 :

Selon la norme ISO 8601, l'heure actuelle est affichée dans le format `hh:mm:ss` où

- hh représente les heures avec une valeur entière comprise entre `00` et 23 (`24:00:00` étant défini comme heure de fin)
- `mm` représente les minutes avec une valeur entière comprise entre `00` et 59
- `ss` représente les secondes avec une valeur entière comprise entre `00` et 59
- Un avion décolle à `18:40:00` à Paris en direction de Santiago de Chili. La durée estimée du vol direct est de 13h30min. À quelle heure (exprimée dans le fuseau horaire de la France), l'avion atterrit-il à l'aéroport de Santiago de Chili ?

- Une fusée met 30h à atteindre la station spatiale internationale (ISS). Si l'arrivée à l'ISS est prévue pour 05:00:00 (GMT+0), à quelle heure (en GMT+0), la fusée doit-elle décoller de la Terre ?

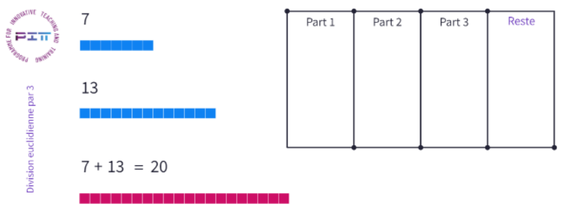
Exercice 2 : Les jours de la semaine

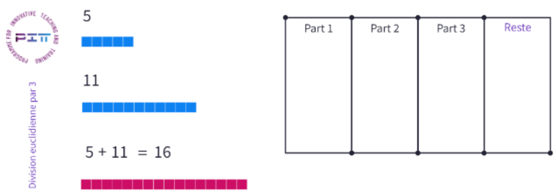
	Indique le jour de la semaine	Calcul
Aujourd'hui, c'est un …		
Dans 7 jours, ce sera un …		
Dans 8 jours, ce sera un …		
Dans 10 jours, ce sera un …		
Dans 22 jours, ce sera un …		
Dans 40 jours, ce sera un …		
Dans 91 jours, ce sera un …		
Dans 365 jours, ce sera un …		

M11 Additionner des restes

Imaginons qu'on dispose de deux sachets de bonbons que tu veux distribuer **équitablement** (c'est-à-dire chacun reçoit la même part) à **3 personnes**.

Interaction Mathigon





Cas 1 :

Le premier sachet contient 7 bonbons et le deuxième 13.

Alice distribue d'abord équitablement les bonbons du 1er sachet aux 3 personnes. Combien de bonbons reste-t-il du premier sachet ?

a	q_1	r_1
7		

Puis elle distribue ceux du 2e sachet. Combien de bonbons reste-t-il du deuxième sachet ?

b	q_2	r_2
13		

Au total, combien de bonbons reste-t-il ? ________________________

Bob procède autrement. Il ouvre les deux sachets et il met les bonbons tous ensemble. Puis il les distribue équitablement aux 3 personnes.

$a + b$	q	r
$7 + 13 = 20$		

Combien de bonbons ne peuvent pas être distribués ? ________________________

Que constates-tu ?

Cas 2 :
Le premier sachet contient 5 bonbons et le deuxième 11.

Alice distribue d'abord équitablement les bonbons du 1er sachet aux 3 personnes. Combien de bonbons reste-t-il du premier sachet ?

a	q_1	r_1
5		

Puis elle distribue ceux du 2e sachet. Combien de bonbons reste-t-il du deuxième sachet ?

b	q_2	r_2
11		

Au total, combien de bonbons reste-t-il ? ______________________________

Que peut-elle faire avec les bonbons restants ? Combien de bonbons resteront finalement ? ______________________________

Bob procède autrement. Il ouvre les deux sachets et il met les bonbons tous ensemble. Puis il les distribue équitablement aux 3 personnes.

$a+b$	q	r
$5+11=16$		

Combien de bonbons ne peuvent pas être distribués ? ______________________________

Que constates-tu ?

____

____

____

____

Exercice :

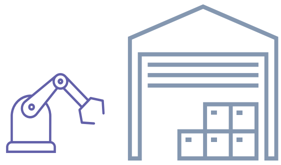
Complète le tableau ci-dessous :

Diviseur	a	r_1	b	r_2	$r_1 + r_2$	$S = a + b$	r
$d = 2$	8		5				
$d = 2$	9		7				
$d = 3$	8		14				
$d = 5$	29		18				
$d = 6$	14		10				
$d = 10$	45		37				

M12 Un nouvel encodage pour Mme Stocktout

Dans le dépôt de Mme Stocktout, il y a **40 articles différents** qui sont tous emballés dans des boîtes identiques. Le dépôt est tellement grand qu'elle décide de programmer un robot qui l'aidera à récupérer et à transporter les articles commandés. Il est prévu que le robot dispose d'un lecteur code-barres pour scanner et identifier les produits. Ainsi, Mme Stocktout doit munir tous les articles d'un code unique. Cependant, Mme Stocktout s'impose quelques restrictions sur le code à utiliser :

- Elle veut que le code soit composé d'**exactement 2 chiffres**.
- Elle veut utiliser **le moins de chiffres différents possibles**.
- Les chiffres employés sont des **nombres consécutifs**.

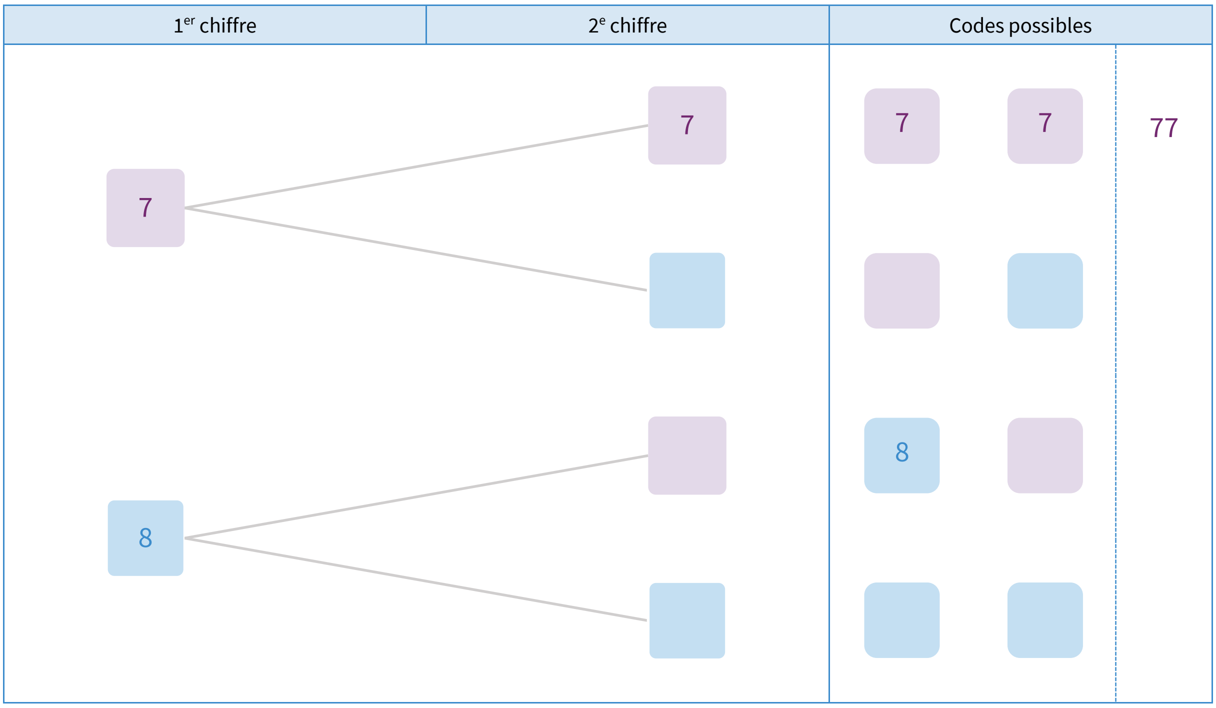


Aide Mme Stocktout à créer les codes pour ses 40 articles.

Tentative 1

Mme Stocktout choisit les deux premiers chiffres parmi les éléments de l'ensemble $A = \{7; 8\}$. Quels sont les codes qu'elle peut former avec ces chiffres ? Combien de codes différents y a-t-il ?

Un **schéma en arbre** peut t'aider à visualiser toutes les combinaisons :



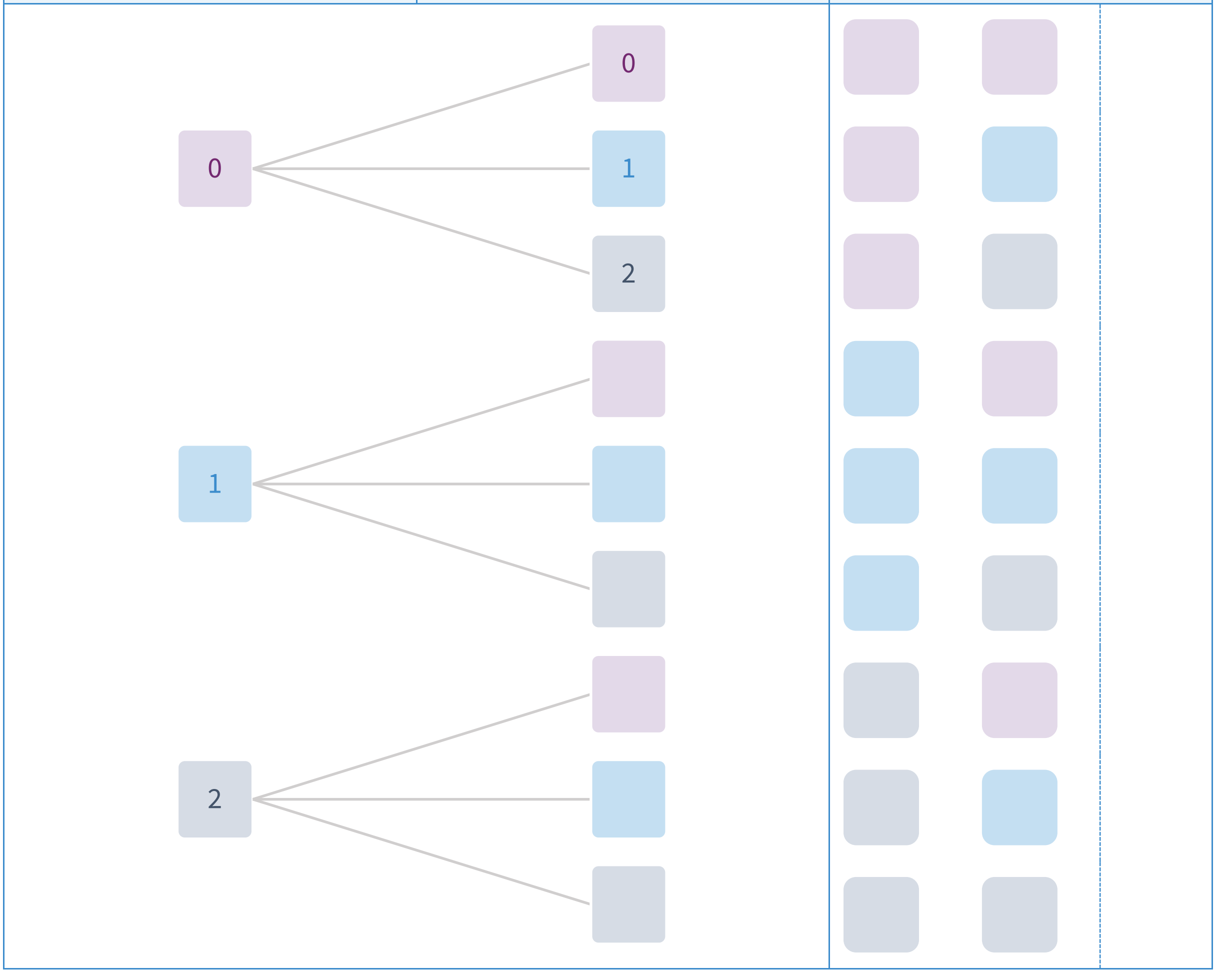
En tout, il y a _____ codes différents.

Évidemment, le nombre de codes différents ne suffit pas pour encoder 40 articles. Mme Stocktout essaie une autre possibilité.

Tentative 2

Mme Stocktout choisit les deux premiers chiffres parmi les éléments de l'ensemble $A = \{0; 1; 2\}$.
Quels sont les codes qu'elle peut former avec ces chiffres ? Combien de codes différents y a-t-il ?

1^er^ chiffre	2^e^ chiffre	Codes possibles



En tout, il y a _____ codes différents.

Pour trouver **uniquement le nombre de codes différents**, tu peux réfléchir de la façon suivante :

Combien de possibilités y a-t-il pour chaque position du code ?

1^er^ chiffre	2^e^ chiffre
_____ possibilités pour le 1^er^ chiffre	_____ possibilités pour le 2^e^ chiffre
_____ · _____ = ______	

Donc, en tout, il y a ___________ codes différents :

Tentative 3

Mme Stocktout continue sa recherche. Aide-la à compléter le tableau ci-dessous :

Si $A = \{3; 4\}$	, alors il peut former		codes différents.
Si $A = \{7; 8; 9\}$	, alors il peut former		codes différents.
Si $A = \{0; 1; 2; 3\}$	, alors il peut former		codes différents.
Si $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$	, alors il peut former		codes différents.
Si $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$	, alors il peut former		codes différents.

Combien de chiffres différents Mme Stocktout doit-elle choisir pour obtenir au moins 40 codes différents ?

Donne un exemple pour l'ensemble A :

En utilisant les chiffres de l'ensemble A défini précédemment, donne quelques exemples des codes ainsi générés :

M13 Une clé de contrôle pour le nouvel encodage

Mme Stocktout décide de choisir les deux premiers chiffres dans l'ensemble $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$

1er chiffre	2e chiffre
_____ possibilités pour le 1er chiffre	_____ possibilités pour le 2e chiffre
_____ · _____ = ______	

Avec ces chiffres, elle peut former ________ codes différents.

Pour augmenter la performance des scans, Mme Stocktout décide d'**ajouter une clé de contrôle** à la fin du code. Le nouveau code se composera finalement de 3 chiffres :

- Les deux premiers chiffres a et b sont choisis parmi les éléments de l'ensemble A.
- Le troisième chiffre, la clé de contrôle, est obtenu de la façon suivante :
  - Tu calcules la somme des chiffres $S = a + b$;
  - Tu effectues la division euclidienne de S par le diviseur d (à choisir) ;
  - La clé de contrôle sera le reste de cette division.

Traitons un exemple :

Exemple 01 : Division euclidienne par $d = 10$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 10.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Existe-t-il des codes qui se terminent par 8 ? Si oui, lesquels ?

Existe-t-il des codes qui se terminent par 9 ? Si oui, lesquels ?

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	10	4	460
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 10$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Mme Stocktout se pose la question suivante : peut-on **choisir un diviseur inférieur à 10** ?

Exemple 02 : Division euclidienne par $d = 2$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 2.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	0	020
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	6 ou 8 ou 10 ou 12	0 ou 2 ou 4 ou 6	060 ou 260 ou 460 ou 660
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 2$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 03 : Division euclidienne par $d = 3$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 3.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	6 ou 9 ou 12	0 ou 3 ou 6	060 ou 360 ou 660
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 3$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n’y a qu’**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 04 : Division euclidienne par $d = 4$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 4.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	8 ou 12	2 ou 6	260 ou 660
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 4$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 05 : Division euclidienne par $d = 5$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 5.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	10	4	460
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 5$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n’y a qu’**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 06 : Division euclidienne par $d = 6$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 6.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	6 ou 12	0 ou 6	060 ou 660
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 6$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 07 : Division euclidienne par $d = 7$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 7.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	7	1	160
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 7$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 08 : Division euclidienne par $d = 8$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 8.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	8	2	260
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 8$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Exemple 09 : Division euclidienne par $d = 9$

La clé de contrôle est le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres par 9.

Code	Somme des chiffres S	Clé de contrôle	Code complet
02	2	2	022
43			
56			
66			
00			

Tous les codes se terminent par ____ .

Voyons si ce choix permet de retrouver des codes abîmés :

Code abîmé	Clé de contrôle	Somme des chiffres	Valeur que la somme doit prendre	Valeur de x	Code initial
$x60$	0	$x + 6$	9	3	360
$x50$					
$0x1$					
$6x1$					

Que peux-tu conclure ? Coche la bonne réponse :

Si $d = 9$	la clé de contrôle **permet de retrouver le code initial**, car il n'y a qu'**une seule possibilité** pour la valeur de x.	☐
	la clé de contrôle **ne permet pas de retrouver le code initial**, car il y a **plusieurs possibilités** pour la valeur de x.	☐

Tableau récapitulatif

Indique par ✅ si la clé de contrôle permet de récupérer le code initial et par ❌ si elle ne le permet pas.

$$A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

Division euclidienne par $d = \ldots$	La clé de contrôle permet de retrouver le code initial.
$d = 2$	
$d = 3$	
$d = 4$	
$d = 5$	
$d = 6$	
$d = 7$	
$d = 8$	
$d = 9$	
$d = 10$	

Que constates-tu ?

M14 Un code optimal

Mme Stocktout constate que la clé de contrôle lui permet de récupérer un chiffre manquant du code à partir d'un diviseur strictement supérieur à 6. Mais pourquoi ? Et pourquoi ne retrouve-t-elle pas le code initial si le diviseur est inférieur à 6 ? Son esprit scientifique attise sa curiosité et la pousse à investiguer plus en détail ce phénomène.

Rappelons certains faits qui ont été découverts pendant les activités précédentes :

- Il y a des familles de nombres qui ont le même reste par la division euclidienne de diviseur d.
  Exemple :
  Les nombres 1, 3 et 5 ont tous un reste égal à _____ par la division euclidienne de diviseur 2.

- Le reste de la division euclidienne de diviseur d d'une somme de deux nombres est égal à la somme des restes de la division euclidienne de de ces deux nombres.
  Exemple :
  Si $d = 4$, le reste de la division euclidienne du nombre 5 est _____ et celui du nombre 6 est _____. Le reste de la somme $S = 5 + 6 = 11$ est égale à la somme des restes __________ .

Les codes de Mme Stocktout sont composés :

- de deux chiffres a et b choisis parmi l'ensemble $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;
- de la clé de contrôle qui est égale au reste de la division euclidienne de la somme des chiffres $S = a + b$ par un diviseur d.

Dès lors, nous pouvons conclure que :

Le **reste** de la division euclidienne de diviseur d **de la somme des chiffres est égal au reste** de la division euclidienne de diviseur d **de la somme des restes** des nombres a et b.

Ainsi, il suffit de **considérer uniquement les restes des différents nombres de l'ensemble A** par la division euclidienne de diviseur d pour trouver l'origine du problème des chiffres manquants !

	1er chiffre	2e chiffre	Clé de contrôle
Code	a	b	r
Reste de la division euclidienne par d	r_1	r_2	Le reste de $r_1 + r_2$

Complète le tableau ci-dessous et surligne tous les doublons dans chaque colonne.

Les éléments de l'ensemble A	Reste de la division euclidienne par								
	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d = 8$	$d = 9$	$d = 10$
0	0								
1	1								
2	0								
3	1								
4	0								
5	1								
6	0								

À partir de $d =$_____ , les colonnes ne comportent plus de doublons. Ainsi, tous les restes sont différents et ceci explique pourquoi nous réussissons à retrouver un chiffre manquant dans ces cas-là !

Examinons quelques derniers exemples pour nous convaincre :

- Pour $d = 2$, il n'est pas possible de récupérer le code initial à partir de la clé de contrôle, car les codes $1\mathbf{1}0$, $1\mathbf{3}0$ et 1__0 ont tous la même clé de contrôle (0). Ces codes ont la même clé de contrôle, car les nombres $\mathbf{1}$, $\mathbf{3}$ et _____ ont tous le même reste par la division euclidienne de diviseur $d = 2$.
- Pour $d = 3$, il n'est pas possible de récupérer le code initial à partir de la clé de contrôle, car les codes $6\mathbf{0}0$, $6\mathbf{3}0$ et 6__0 ont tous la même clé de contrôle (0). Ces codes ont la même clé de contrôle, car les nombres $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$ et ____ ont tous le même reste par la division euclidienne de diviseur $d = 3$.
- Pour $d = 4$, il n'est pas possible de récupérer le code initial à partir de la clé de contrôle, car les codes 3__1 et $3\mathbf{6}1$ ont tous la même clé de contrôle (1). Ces codes ont la même clé de contrôle, car les nombres _____ et $\mathbf{6}$ ont tous le même reste par la division euclidienne de diviseur $d = 4$.
- Pour $d = 5$, il n'est pas possible de récupérer le code initial à partir de la clé de contrôle, car les codes $0\mathbf{1}1$ et 0__1 ont tous la même clé de contrôle (1). Ces codes ont la même clé de contrôle, car les nombres $\mathbf{1}$ et _____ ont tous le même reste par la division euclidienne de diviseur $d = 5$.
- Pour $d = 6$, il n'est pas possible de récupérer le code initial à partir de la clé de contrôle, car les codes $4\mathbf{0}4$ et 4__4 ont tous la même clé de contrôle (2). Ces codes ont la même clé de contrôle, car les nombres $\mathbf{0}$ et _____ ont tous le même reste par la division euclidienne de diviseur $d = 6$.
- Si $d \geq 7$, alors il est possible de récupérer le code initial à partir de la clé de contrôle, car tous les nombres ont des restes différents.

M15 Leçons tirées des lignes et de chiffres

Nous avons rencontré deux méthodes pour créer des codes-barres :

- Celle d'Alice basée sur la somme des chiffres.
- Celle de Bob basée sur le produit des chiffres.

Laquelle est la meilleure et pourquoi ?

Mme Stocktout a créé des codes-barres où la clé de contrôle est obtenue au moyen de divisions euclidiennes. Si elle choisit les deux premiers chiffres parmi les chiffres de 0 à 6, quelles divisions euclidiennes peut-elle prendre pour générer sa clé de contrôle ?

Pour créer le plus de codes-barres, dans quel ensemble doit-on choisir les chiffres ?

Combine tous les éléments et explique une méthode efficace pour créer des codes-barres à 12 chiffres avec un chiffre de contrôle (13 chiffres en tout).

M16 European Article Number - EAN

Pour standardiser les échanges de biens, certains organismes ont établi des normes pour l'encodage électronique des produits. En Europe, les produits portent un EAN (European Article Number) unique de 13 chiffres qui donne des informations sur le pays d'origine, le producteur et le produit. Ce numéro est souvent imprimé en code-barres pour faciliter la lecture électronique et le traitement informatique des ventes et distributions.

Voici un extrait du catalogue des consignes pour calculer la clé de contrôle d'un article encodé par le système EAN13.

3 453120 236458

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code	3	4	5	3	1	2	0	2	3	6	4	5	**?**	
2	Additionner les chiffres de rang pair		4		3		2		2		6		5		22
3	Multiplier le résultat par 3														66
4	Additionner les chiffres de rang impair	3		5		1		0		3		4			16
5	Additionner le résultat des étapes **3** et **4**														82
6	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **5**														2
7	Soustraire le résultat de l'étape **6** de 10														8
	Code complet	3	4	5	3	1	2	0	2	3	6	4	5	8	

Remarque importante : Si le résultat de l'étape 7 vaut 10, on écrit 0.

Exercice 01 : Calculer la clé de contrôle pour un code EAN13

Regarde le code-barres se trouvant sur un yaourt LUXLAIT et refais le calcul décrit dans le mode d’emploi ci-dessus pour retrouver la clé de contrôle.

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code													**?**	
2	Additionner les chiffres de rang pair														
3	Multiplier le résultat par 3														
4	Additionner les chiffres de rang impair														
5	Additionner le résultat des étapes **3** et **4**														
6	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l’étape **5**														
7	Soustraire le résultat de l’étape **6** de 10														
	Code complet														

Exercice 02 : Calculer la clé de contrôle pour un code EAN13

Trouve un code-barres EAN13 (ou ISBN13) et refais le calcul décrit dans le mode d'emploi ci-dessus pour retrouver la clé de contrôle.

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code													**?**	
2	Additionner les chiffres de rang pair														
3	Multiplier le résultat par 3														
4	Additionner les chiffres de rang impair														
5	Additionner le résultat des étapes **3** et **4**														
6	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **5**														
7	Soustraire le résultat de l'étape **6** de 10														
	Code complet														

M17 Détecter des codes erronés

Parmi les codes EAN proposés ci-dessous, décide à chaque fois s'il s'agit d'un code correct ou d'un code erroné. Marque les codes corrects par et les codes incorrects par . Corrige les codes erronés en ajustant la clé de contrôle.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Code A	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Code B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Code C	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

M18 Calculer un chiffre manquant pour un code EAN13

Pour les codes EAN ci-dessous, retrouve à chaque fois le chiffre manquant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Code	5	0	0	1		0	1	0	0	0	2	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Code	4	0	0		1	2	3	0	0	0	0	0	1

M19 Les secrets des sommes pondérées ?

Alice et **Bob** travaillent au supermarché et ils doivent scanner un article dont le code-barres a été déchiré par malchance :

6 696689 6 69696

Ainsi, ils doivent entrer le code **manuellement** à l'aide du clavier de la caisse :

Alice		**Bob**	
	6696689669696		6696689696696

Qui a entré le code correctement ? **Alice** ☐ **Bob** ☐

___________ a commis une erreur très commune lors de la transcription du code : la permutation des positions de deux chiffres consécutifs.

Imaginons un système de calcul de la clé de contrôle sans l'étape multiplication par 3. Les consignes seraient alors les suivantes (par souci de simplicité, nous abandonnons également la dernière instruction qui demandait de soustraire l'avant-dernier résultat de 10) :

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code														
2	Additionner tous les chiffres														
3	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **2**														
	Code complet														

Considère d'abord le code entré par **Alice** :

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code														
2	Additionner tous les chiffres														
3	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **2**														
	Code complet														

Refais le même calcul pour le code erroné de **Bob** :

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code														
2	Additionner tous les chiffres														
3	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **2**														
	Code complet														

L'erreur de Bob

- est détectée. ☐
- n'est pas détectée. ☐

Répète l'exercice avec **des coefficients alternant entre 1 et 3, donc avec les vraies règles du code EAN-13.**

Considère d'abord le code entré par **Alice** :

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code													**?**	
2	Additionner les chiffres de rang pair														
3	Multiplier le résultat par 3														
4	Additionner les chiffres de rang impair														
5	Additionner le résultat des étapes **3** et **4**														
6	Prendre le reste de la division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **5**														
7	Soustraire le résultat de l'étape **6** de 10														
	Code complet														

Refais le même calcul pour le code erroné de **Bob** :

Étape															Calcul
1	Attribuer le rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	Code													**?**	
2	Additionner les chiffres de rang pair														
3	Multiplier le résultat par 3														
4	Additionner les chiffres de rang impair														
5	Additionner le résultat des étapes **3** et **4**														
6	Prendre le reste de la														

	division euclidienne par 10 du résultat de l'étape **5**		
7	Soustraire le résultat de l'étape **6** de 10		
	Code complet		

L'erreur de Bob
- est détectée. ☐
- n'est pas détectée. ☐

2.4 Idées interdisciplinaires

Éducation artistique

Le cours d'éducation artistique permet de faire le lien entre mathématiques et art en créant des œuvres d'art basées sur les codes-barres. Inspiré du code-barre LUXLAIT qui intervient dans ce module, les élèves doivent créer leur propre code-barres artistique. Pour plus d'inspiration, les oeuvres de l'agence japonaise Barcode Design peuvent être montrées :

Barcode Design

https://designmadeinjapan.com/magazine/graphic-design/bringing-barcodes-to-life-barcodes-by-design-barcoder/

Cette agence a même reçu le prix Titanium au Festival international de la créativité à Cannes pour ces designs de codes-barres.

Les œuvres de l'artiste américain Scott Blake peuvent aussi servir d'inspiration aux élèves.

Scott Blake

https://www.youtube.com/watch?v=a2M6tVUq0qc

Remarque : Arrêter la vidéo après 2m30.

Pour rendre le lien entre art et mathématiques plus forts, on peut demander aux élèves de transmettre un message via leur code-barres :

- Des chiffres importants pour eux
- Coder les lettres en chiffres et transmettre un message via ces chiffres
- Etc.

Attention à la clé de contrôle : les élèves doivent créer un message à 13 chiffres qui constitue un code-barres réel, c'est-à-dire la clé de contrôle doit être la bonne. Une alternative est que les élèves créent un nouveau calcul de clé contrôle (avec éventuellement plus de chiffres). Ainsi ils peuvent encoder n'importe quel message de n'importe quelle longueur.

Leur création doit alors être accompagnée d'un document qui explique et justifie le nouvel algorithme mathématique derrière leur code-barres.

Cette activité s'intègre parfaitement dans le programme du cours d'éducation artistique de 6^{e} classique et générale :

- 6^{e} classique : L'artiste Vasarely figure sur le programme officiel du cours d'éducation artistique. Cet artiste est connu comme le père de l'art optique et ses œuvres sont constituées de lignes en alternance de noir et de blanc, ce qui nous rappelle les codes-barres. Voilà un exemple illustrant comment faire le lien entre codes-barres et Vasarely au cours d'éducation artistique:

Codes-barres
Vasarely

https://www.anyssa.org/classedesgnomes/des-animaux-en-code-barres-a-la-maniere-de-vasarely/

- 6^{e} générale : L'introduction aux bases du design graphique figure sur le programme du cours d'éducation artistique. Le lien entre le design graphique et la création de codes-barres différents et créatifs est évident.

Pour conclure, notons que nous apprécions fortement l'interdisciplinarité entre mathématiques et arts, un thème très à la mode en ce moment. C'est pourquoi le thème de la journée internationale de mathématiques de 2025 est aussi *Mathematics, Art, and Creativity.*

Digital Sciences

Ce module se combine aussi parfaitement avec le cours de Digital Sciences. Les élèves peuvent écrire un petit programme basé sur les codes-barres. Ici l'enseignant peut considérer différents niveaux de difficulté :

- Écrire un programme qui calcule la clé de contrôle d'un code-barres à partir des 12 premiers chiffres.
- Écrire un programme qui vérifie si un code-barres est correct ou pas.
- Écrire un programme qui trouve le chiffre manquant d'un code-barres abîmé.
- Écrire un programme qui vérifie si un code-barres est correct ou pas. Dans le cas où le code n'est pas correct, le programme indique si un chiffre a été mal copié ou si deux chiffres ont été échangés.

Pour plus de détails sur le quatrième programme, nous renvoyons les enseignants à la section 2.5 Pour aller plus loin.

Ces programmes peuvent être écrits dans n'importe quel langage de programmation, tels que Python et Scratch, qui en sont des exemples typiques. Il est même possible de programmer ces questions dans un tableur, comme Excel.

La compétence d'écrire un algorithme n'est pas incluse dans le programme du cours de Digital Sciences de 6^{e}, mais elle l'est dans celui de 7^{e}. L'ajout de l'écriture d'un programme à ce module constitue donc une bonne répétition pour les élèves et peut même servir de rappel avant de débuter la programmation de robots, qui est incluse dans le programme de 6e.

2.5 Pour aller plus loin

Les origines des codes-barres

Les codes-barres ont été inventés aux États-Unis sous le nom de *UPC : Universal Product Code*. Dans la vidéo suivante le chroniqueur et humoriste David Castello-Lopes raconte l'histoire des codes-barres et comment le premier code-barres a été scanné le 26 juin 1974.

David
Castello-Lopes

https://youtu.be/wgPSG0gLE8Y

Malgré leur nom, les codes-barres UPC n'étaient pas du tout universels. Leur utilisation n'était possible qu'aux États-Unis. C'est pourquoi en Europe, en 1977, on a inventé un nouveau système de codes-barres appelé EAN : European Article Number. Cependant, au lieu d'inventer un système concurrent avec le système américain, le EAN étend le UPC américain de manière ingénieuse. Le système UPC contient 12 chiffres, alors que le système EAN en contient 13, mais de telle manière qu'un code-barres EAN commençant par 0 équivaut à un code-barres UPC sans le premier 0. Ainsi, les Américains ont pu continuer à utiliser leur système pendant que le reste du monde utilisait des codes-barres EAN ne commençant pas par 0. Depuis 2005, les Américains ont aussi adopté la version européenne du code-barres mais en l'appelant UPC-13 (Jones, 2009).

Le fonctionnement des codes-barres

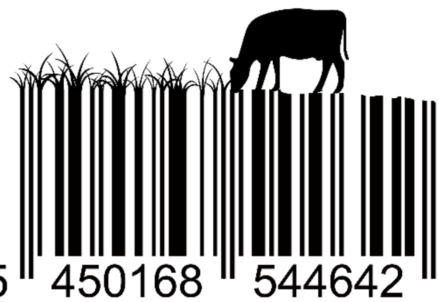
Dans le reste du texte nous allons nous restreindre aux codes-barres EAN à 13 chiffres. Cette partie est majoritairement basée sur (Stammbach, 2006).

Un numéro EAN se décompose en 4 blocs dont les significations respectives sont détaillées ci-dessous (les livres et revues constituent un cas particulier qui sera examiné plus loin). Les deux premiers chiffres correspondent au pays producteur (Made in...). Les dix chiffres suivants identifient l'entreprise productrice et le numéro de l'article au sein de cette entreprise.

Le tableau suivant montre les codes de quelques pays (IREM, 2000).

États-Unis, Canada	00-09
France	30-37
Allemagne	40-43
Japon	49
Grande-Bretagne	50
Belgique	54
Danemark	57
Italie	80-81
Suisse	76
Autriche	90-91
Pays-Bas	87

Le code-barres du yaourt LUXLAIT, également utilisé dans le module, montre que le Luxembourg utilise le même code que la Belgique, probablement en raison de l'union économique entre ces deux pays.



Comme vu dans ce module, le 13e chiffre est une clé de contrôle. L'algorithme veut que si $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$ est le code-barres, alors a_{13} vaut 10 moins le reste de la division euclidienne de

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12}$$

par 10.

Autrement dit

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}$$

est un multiple de 10.

Ceci peut aussi être exprimé en termes de calcul modulaire :

$$a_{13} \equiv -(a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12}) \bmod 10$$

Cette clé de contrôle sert en premier lieu à identifier les fautes de lecture. Le lecteur lit le code-barres et vérifie qu'il s'agit bien d'un code-barres correct à l'aide de l'algorithme. Si c'est le cas, il émet un bip et transmet l'article et le prix à la caisse. Si la clé de contrôle n'obéit pas à l'algorithme, le lecteur n'admet pas le code-barres. Il a identifié la faute de lecture et il faut rescanner l'article.

Proposition : Les codes-barres ne permettent pas seulement au lecteur d'identifier une faute de lecture, mais aussi de scanner un article même si un des chiffres est illisible.

> **Preuve :** Supposons d'abord qu'un des chiffres de rang impair soit illisible. Sans perte de généralité supposons que a_5 est illisible. Reprenons l'équation modulaire, et nous obtenons :
>
> $$a_5 \equiv -(a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}) \bmod 10$$
>
> Comme a_5 est un chiffre il y a une solution unique à cette équation modulaire.
>
> Supposons maintenant qu'un des chiffres de rang pair soit illisible et sans perte de généralité supposons que a_6 soit illisible. Alors nous avons
>
> $$3a_6 \equiv -(a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}) \bmod 10$$
>
> Comme 3 et 10 sont premiers entre eux, 3 a un inverse modulo 10 . En fait le produit de 3 et 7 vaut 1 modulo 10 . En multipliant les deux côtés de l'équation par 7 , nous obtiendrons une valeur pour $a_6$qui sera unique car a_6 est un chiffre.

Un lecteur attentif notera que la démonstration précédente demeure inchangée sans la somme pondérée. Alors, quelle est l'utilité de cette somme pondérée ? En effet elle sert à détecter une erreur humaine qui intervient quand le caissier ou la caissière doit taper le code-barres à la main : l'inversion de deux chiffres consécutifs.

Proposition : L'algorithme du code-barres EAN détecte l'inversion de deux chiffres consécutifs sauf si leur différence vaut 5 .

> **Preuve :** Soit $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$ un code-barres et inversant a_i et a_{i+1}. Si les deux codes-barres sont des codes-barres valides, nous avons
>
> $$a_{13} \equiv -(a_1 + 3a_2 + \cdots + 3a_i + a_{i+1} + \cdots + 3a_{12}) \bmod 10$$
>
> $$a_{13} \equiv -(a_1 + 3a_2 + \cdots + 3a_{i+1} + a_i + \cdots + 3a_{12}) \bmod 10$$
>
> Nous avons donc

$a_1 + 3a_2 + \cdots + 3a_{i+1} + a_i + \cdots + 3a_{12} \equiv a_1 + 3a_2 + \cdots + 3a_i + a_{i+1} + \cdots + 3a_{12}$ mod 10Cette équation est équivalente à

$$2(a_i - a_{i+1}) \equiv 0 \text{ mod } 10$$

Cette dernière équation est vérifiée si et seulement si la différence $a_i - a_{i+1}$est un multiple de 5 . Comme a_i et a_{i+1} sont des chiffres, la différence est un multiple de 5 si et seulement si $a_i = a_{i+1}$ou $|a_i - a_{i+1}| = 5$.

Attention : À la fin de ce module, l'utilité de la somme pondérée est démontrée en illsutrant qu'elle permet de détecter les erreurs d'inversion de deux chiffres consécutifs. Le fait que cela ne soit possible que lorsque la différence entre les deux chiffres n'est pas égale à 5 est omis pour ne pas compliquer davantage le raisonnement.

L'inversion de deux chiffres de rang pair ou de deux chiffres de rang impair ne sera malheureusement pas détectée par l'algorithme du code-barres.

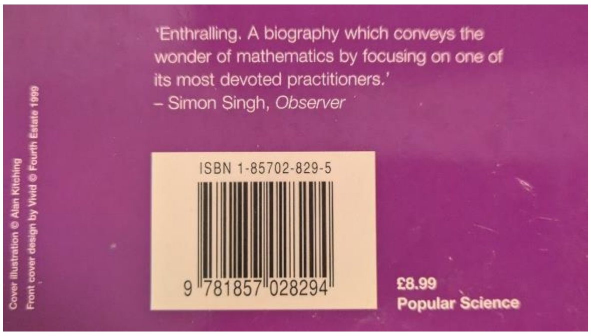
Une mesure de sécurité comme la clé de contrôle permet donc d'éviter une partie des erreurs, mais pas toutes. C'est toujours le cas. Le système est bon lorsque, lorsqu'il réduit significativement la fréquence des erreurs dans leur ensemble. Il est d'autant plus effectif, plus la réduction de la capacité d'erreur globale est importante. Pour pouvoir juger de ce dernier point, il faut connaître la prévalence des différents types d'erreurs. Une étude basée sur la langue anglaise a permis de constater la prévalence des erreurs lors de la transmission de suites de chiffres (oralement ou par saisie) (Stammbach, 2006) :

- Les faux chiffres constituent 79,1% des fautes.
- L'inversion de deux chiffres consécutifs constitue 10,2 % des fautes.
- Tous les autres types d'erreurs sont inférieurs à 1 %.

Aujourd'hui, les codes-barres ne sont pas seulement utilisés pour désigner des produits, mais ils sont également utilisés - de manière modifiée - à de nombreuses autres fins. La raison en est la large diffusion du système initial. Cela a eu pour conséquence que les lecteurs ont pu être fabriqués en très grand nombre et donc à bon marché. Ainsi nous les trouvons aussi sur toutes nos cartes de fidélité, carte de bibliothèque ou même sur notre carte de CNS.

Le code ISBN

Lorsqu'on examine un livre récent, on constate qu'il est muni d'un code-barres, tout comme les produits de supermarché. En revanche, un livre plus ancien, publié avant 2007, possède à la fois un code-barres EAN et un numéro ISBN à 10 éléments.



L'abréviation ISBN signifie International Standard Book Number. Le système ISBN repose sur un principe similaire à celui de l'EAN, mais avec une touche d'ingéniosité supplémentaire. Les 10 éléments du code ISBN prennent les valeurs de 0 à 9 et X qui représente le nombre 10 (merci aux mathématiciens Romains). Les neuf premiers éléments a_1 à a_9 déterminent le livre de manière univoque et le dixième élément a_{10} est une clé de contrôle qui est obtenue de la manière suivante

$$a_{10} \equiv -(10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9) \bmod 11$$

Tout comme le code EAN, le code ISBN détecte les erreurs de lecture et permet de reconstituer un chiffre illisible (les preuves étant très similaires).

Cependant, contrairement au code EAN, l'ISBN permet de détecter toujours l'inversion de n'importe quels deux éléments.

Preuve : Imaginons les éléments $a_i$et a_k ont été inversés pour $1 \leq i < k \leq 9$. Alors

$$a_{10} \equiv -(10a_1 + 9a_2 + \cdots + (11-i)a_i + \cdots + (11-k)a_k + \cdots + 2a_9) \bmod 11$$

$$a_{10} \equiv -(10a_1 + 9a_2 + \cdots + (11-i)a_k + \cdots + (11-k)a_i + \cdots + 2a_9) \bmod 11$$

Ces deux équations sont équivalentes à

$$(a_i - a_k)(k-i) \equiv 0 \bmod 11$$

Comme $0 < |k-i| < 9$ et tous les nombres entre 1 et 9 sont premiers à 11 (car 11 est un nombre premier), nous avons que

$(a_i - a_k) \equiv 0 \bmod 11.$

Les éléments a_i et a_k prennent les valeurs de 0 à 10 ce qui entraîne que $0 \leq |a_i - a_k| \leq 10.$ La seule solution à l'équation précédente est donc que $a_i = a_k$.

Malgré la performance du code ISBN, le numéro ISBN est passé de 10 à 13 chiffres en 2007 (Stammbach, 2006).

Les comptes IBAN

Actuellement en Europe, nous utilisons des numéros de compte IBAN (International Bank Account Number), un système international de numérotation des comptes bancaires. Un IBAN est composé d'au plus 34 caractères, dont :

- Les deux premiers caractères indiquent le code du pays (par exemple, LU pour le Luxembourg, BE pour la Belgique, DE pour l'Allemagne, FR pour la France, etc.),
- Les deux caractères suivants constituent la clé de contrôle,
- Les au plus 30 derniers caractères représentent le numéro de compte.

L'IBAN facilite ainsi les virements et prélèvements de compte à compte, que ce soit au sein d'un même pays ou lors d'opérations sur des comptes détenus dans des banques de différents pays.

Contrairement aux exemples vus précédemment, l'IBAN comporte deux chiffres pour la clé de contrôle. Celle-ci ne se situe pas à la fin mais en troisième et quatrième position. L'algorithme utilisé pour obtenir cette clé de contrôle diffère des précédents mais reste assez similaire (Mathelounge, 2019) :

3) On considère le code IBAN et on enlève les deux lettres du début ainsi que les deux chiffres de la clé de contrôle.
4) Les lettres sont transformées en nombres en utilisant le système A=10, B=11, C=12, ... (autrement dit, chaque lettre est remplacée par le nombre qui la représente en ASCII moins 55).
5) Le nombre constitué de 4 chiffres formés par les deux lettres est ajouté à la fin du numéro de compte restant.
6) Ainsi on obtient un nombre à 34 chiffres.
7) On calcule le reste de la division du nombre de l'étape 4 par 97.
8) Les deux chiffres de la clé de contrôle forme le résultat de 98 moins le reste obtenu à l'étape 5.

Ainsi, un système de ebanking peut vérifier si le numéro de compte indiqué sur un virement est effectivement un numéro de compte IBAN valide. Si ce n'est pas le cas, le virement est refusé.

Comme 97 est un nombre premier, ce système permet aussi de retrouver le numéro IBAN quand un chiffre est illisible.

Ceci me rappelle une histoire que j'ai vécue lors du mariage d'une amie mathématicienne à moi. En guise de cadeau, ses amis avaient rassemblé une somme d'argent pour le couple, mais ils avaient prévu une série d'épreuves amusantes avant de leur remettre le précieux butin.

Après avoir brillamment réussi les épreuves, les amis, avec une solennité théâtrale, annoncèrent qu'ils avaient déposé l'argent sur un compte bancaire. Pour y accéder, le couple devait utiliser leur carte d'identité et le numéro IBAN du compte. Ils leur remirent alors une feuille avec le numéro IBAN... mais il manquait un chiffre !

Avec un sourire malicieux, les amis présentèrent un bol rempli de confettis colorés, en déclarant que le chiffre manquant se trouvait sur l'un des confettis. Mon amie, gémissant au grand plaisir des invités, se mit à chercher le confetti sans aucune chance de réussite. Son mari et elle abandonnèrent disant qu'ils allaient chercher plus soigneusement à la maison.

Plus tard dans la soirée, elle vint chez moi, un sourire complice aux lèvres. Je lui fis un clin d'œil et lui dis qu'il ne fallait absolument pas chercher dans ce bol de confettis. Elle me confia alors, en riant, qu'elle le savait, mais qu'elle ne voulait pas gâcher la surprise pour ses amis.

C'est donc grâce aux mathématiques qu'un couple fraîchement marié peut gagner de l'argent sans se perdre la tête dans des confettis.

Le QR code

Les codes-barres sont progressivement remplacés par leurs homologues bidimensionnels : les QR codes. QR signifie *Quick Response*. Inventés en 1994 par la société japonaise DENSO Corporation pour améliorer la traçabilité des pièces dans les usines Toyota, les QR codes se distinguent par leur rapidité de lecture et leur résistance aux dommages, comme les taches d'huile. Aujourd'hui, les QR codes sont omniprésents : des publicités aux pages web, en passant par les cartes de visite.

Toutefois, comme d'autres moyens physiques de stockage de données, les QR codes sont sujets à des erreurs. Pour garantir que les lecteurs de QR codes peuvent néanmoins traiter les informations de manière fiable lorsque des erreurs se produisent, les QR codes ne possèdent pas une, ni deux clés de contrôle, mais reposent sur un algorithme mathématique plus compliqué, appelé code de Reed-Solomon. Le principe sous-jacent est basé sur des polynômes sur des corps finis. Pour plus d'informations sur les QR codes nous vous invitions à consulter l'article très instructif de Down, Sigmon et Klima (2021). Derek Muller de la chaîne Youtube Veritasium a réalisé une vidéo explicative sur les QR codes. Il y construit un QR code en partant de zéro et explique la technologie et les mathématiques derrière cette invention. Au début de la vidéo, il raconte également de façon charmante l'histoire des codes-barres.

QR Code
Veritasium

https://www.youtube.com/watch?v=w5ebcowAJD8

Références

- Downs, Adam S., Sigmon, Neil P. and Klima, Richard E. (2021). The Mathematics of QR Codes. *Asian Technology Conference in Mathematics* https://atcm.mathandtech.org/EP2021/invited/21891.pdf
- Groupe Lycée, Irem de STRSABOURG. (2000). Clés de contrôle. *Repères IREM.* 41.
- Jones, Chris. (2009). How Barcodes Crossed the Atlantic. *Mathematics in school* 38.5 : 30–31.
- Mathelounge. (2019). Wissensartikel: Der IBAN-Algorithmus. https://www.mathelounge.de/673376/wissensartikel-der-iban-algorithmus
- Stammbach, Urs. (2006). EAN, ISBN, CD, DVD: Von Prüfziffern zu fehlerkorrigierenden Codes. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht. ETH Zurich.

2.6 La paroles aux scientifiques

Cette section met en lumière trois mathématiciens dont l'expertise se concentre sur la cryptographie. Deux d'entre eux occupent des postes de chercheurs postdoctoraux en cryptographie au sein du SnT, tandis que le troisième poursuit son doctorat au département de mathématiques. Leur point commun réside dans leur approche interdisciplinaire, intégrant habilement des concepts de mathématiques pures, de cryptographie et de sciences informatiques dans leurs travaux de recherche respectifs.

01 François Gérard

François Gerard a étudié les sciences informatiques à l'Université Libre de Bruxelles où il a obtenu son doctorat en 2020. Durant son parcours académique, il a acquis une expérience professionnelle en tant qu'assistant d'enseignement au sein de cette même université. Ses recherches se concentrent principalement sur la cryptographie post-quantique et plus particulièrement sur la cryptographie basée sur les réseaux euclidiens. En 2020, François a intégré l'Université du Luxembourg où il occupe actuellement un poste de chercheur postdoctoral au SnT (Interdisciplinary Centre for Security, Reliability and Trust).

François
Gérard

https://www.youtube.com/watch?v=7olHUTjzKyQ

02 Pierrick Méaux

Pierrick Méaux a étudié les mathématiques à l'Université de Limoges, complétant son parcours par un séjour Erasmus à Séville. En 2017, il a obtenu un doctorat en mathématiques à l'École Normale Supérieure de Paris. Sa thèse, intitulée *Hybrid Fully Homomorphic Framework*, portait sur la cryptographie. Après un premier postdoctorat à l'Université catholique de Louvain, il a rejoint l'Université du Luxembourg en 2021, où il est actuellement chercheur postdoctoral au SnT (Interdisciplinary Centre for Security, Reliability and Trust). Ses recherches portent sur la cryptographie, en particulier sur les fonctions booléennes, le chiffrement complètement homomorphe, la conception de chiffrements symétriques et la sécurité face aux attaques par canaux auxiliaires. Il est l'auteur d'une trentaine d'articles scientifiques dans le domaine.

Pierrick
Méaux

https://www.youtube.com/watch?v=qtsUK5CBhyg

03 Tim Seuré

Tim Seuré a effectué ses études de mathématiques à l'Université du Luxembourg, où il s'est distingué par son excellence académique. Son parcours a été récompensé à deux reprises par la Société Mathématique du Luxembourg, en 2021 et 2023, ainsi que par le prestigieux prix d'excellence académique Portabella en 2021. Actuellement doctorant à l'Université du Luxembourg, Tim mène ses recherches au sein de deux équipes : le groupe dirigé par Gabor Wiese au Département de Mathématiques (DMATH) et celui de Jean-Sébastien Coron au SnT (Interdisciplinary Centre for Security, Reliability and Trust). Ses travaux se concentrent principalement sur le chiffrement entièrement homomorphe et bénéficient du soutien d'une bourse individuelle AFR octroyée par le Fonds National de la Recherche.

Tim
Seuré

https://www.youtube.com/watch?v=O5cVIB1qv-8

ISSN 2738-9383

PIT

TEACHING AND • TRAINING • PROGRAMME FOR • INNOVATIVE •